Exercices du CH01 : Séries et sommabilité

Exercices de la banque INP à étudier : ex 1 (suites équivalentes), 5 (séries de Bertrand), 6 (d'Alembert), 7 (critère des équivalents), 46 (utilisation de DL), 55 (suites récurrentes doubles),

Niveaux de difficulté des exercices de TD :

(*) : Exercice simple, en général de l'application directe du cours.

(**) : Exercice de niveau intermédiaire.

(***) : Exercice difficile, demandant de l'initiative.

I Feuille 24 MP2I, "Sommations"

Exercice 1 (*)
Nature et somme des séries de terme général :

1) $\ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$
2) $(-1)^n \int_0^1 t^n dt$
3) $\frac{n+1}{2^n}$
4) $\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$
5) $\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$
6) $\arctan \frac{1}{n^2+n+1}$
(étudier $\arctan(n+1) - \arctan n$)

Exercice 2 (**)
Nature des séries de terme général :

1) $\frac{n!}{n^n}$
2) $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
3) $\frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$
4) $\tan(1/n^2). \ln\left(\frac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}\right)$
5) $\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$
6) $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}$
7) $\frac{n^2}{2^n+n}$
8) $\frac{(\ln n)^n}{n!}$
9) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1$
10) $\frac{1}{n}$ si n est un carré, $\frac{1}{n^2}$ sinon
11) $\int_n^{n+1/2} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx$
12) $\frac{a^n n^n}{n!\, n^b}$, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $(a, b) \neq (1/e, 1/2)$
13) $(\pi/2)^{3/5} - (\arctan n)^{3/5}$
14) $u_{2n} = \prod_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{k}$, $u_{2n+1} = 0$
15) $\left(\operatorname{ch} \sqrt{\ln n}\right)^{-2}$
16) $\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$
17) $\frac{n^{kn}}{(nk)!}$, $k \in \mathbb{N}$
18) $\sqrt[3]{n^3 - 4n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + an + b}$,
$(a, b) \in \mathbb{R}^2$
19) $\left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-1/6}$
20) $\frac{1!+2!+\ldots+n!}{(n+p)!}$

Exercice 3 (**)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Montrer que $\sum u_n$, $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$, $\sum \ln(1 + u_n)$ et $\sum \int_0^{u_n} \frac{1}{1+x^e} dx$ sont de même nature.

Exercice 4 (Comparaisons entre sommes partielles et restes de deux SATP)**

1. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Montrer que si une des deux séries converge (resp. diverge), alors elles convergent (resp. divergent) toutes deux et leurs restes (resp. sommes partielles) sont équivalent(e)s.
2. Soit $u_0 > 0$, et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$ pour $n \geq 0$. Étudier $\sum 1/u_n$, et donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} 1/u_k$.

Exercice 5 (*Wallis et Stirling)**

1. Montrer que $(u_n) = \left(\frac{n!\,\exp(n)}{n^n\sqrt{n}}\right)$ converge vers une limite $L > 0$ (étudier la série télescopique associée à $(\ln(u_n))$). Le calcul de L donne un équivalent de $n!$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit les **intégrales de Wallis** : $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$.
   Montrer : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, $I_{2p+1}/I_{2p-1} \leq I_{2p}/I_{2p-1} \leq 1$, enfin : $\lim\limits_{p\to+\infty} I_{2p}/I_{2p-1} = 1$.
   Calculer explicitement I_{2p} et I_{2p+1}, montrer que $nI_nI_{n-1} = \pi/2$ et enfin : $I_n \sim \sqrt{\pi/(2n)}$.
   En déduire la **formule de Stirling** : $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.}$

Exercice 6 (**)

Convergence de la série de terme général :

1) $u_n = n\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\alpha}$

2) $u_n = \frac{R_n}{S_n}$ (restes et sommes partielles de $\sum 1/n^{\alpha}$)

3) $u_n = 1/\sum\limits_{k=1}^{n} \ln k$

Exercice 7 (**)

Équivalent de $\left(\sum\limits_{k=n}^{+\infty} e^{-\sqrt{k}}\right)$.

Exercice 8 (***)

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs de suite de sommes partielles (S_n). Montrer que :

1. $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$ est convergente (utiliser une comparaison intégrale) ;
2. $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{S_n}$ sont de même nature (si $\sum u_n$ diverge, utiliser $\sum \frac{u_n}{S_{n-1}}$ et une comparaison intégrale).

Exercice 9 (***)

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs divergente. On note (S_n) la suite de ses sommes partielles.

1. Montrer que $\frac{a_{N+1}}{S_{N+1}} + \cdots + \frac{a_{N+k}}{S_{N+k}} \geq 1 - \frac{S_N}{S_{N+k}}$, et en déduire que $\sum \frac{a_n}{S_n}$ est divergente.
2. Etablir que $\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$, et en déduire que $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$ est convergente (utiliser une intégrale).

On suppose maintenant que $\sum a_n$ est convergente, (a_n) non stationnaire à 0, et on pose $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$.

3. Montrer pour $m < n$: $\frac{a_m}{R_m} + \cdots + \frac{a_n}{R_n} \geq 1 - \frac{R_n}{R_m}$. Qu'en déduire ?
4. Montrer que : $\frac{a_n}{\sqrt{R_n}} \leq 2(\sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}})$. Qu'en déduire ?

Exercice 10 (**)

Soit une suite (z_n) telle que $Re(z_n) \geq 0$, $\sum z_n$ et $\sum z_n^2$ convergent. Montrer que $\sum |z_n|^2$ converge.

Exercice 11 (*)

Trouver les réels a, b, c pour que $\sum u_n$ converge où : $u_n = a\ln(n^2-1) + b\ln(n+2) + c\ln(n^2+2n)$.

Exercice 12 (**)

Convergence de la série de terme général :

1) $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{(-1)^n + \sqrt{n}}\right)$

2) $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

3) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

4) $\sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$

5) $\frac{(-1)^n}{\ln(n + (-1)^n)}$

6) $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln x}} \sin x\, dx$

7) $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$

8) $\frac{(-1)^n}{n^{2/3} + \cos n}$

9) $\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$

Exercice 13 (*)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $\sum (-1)^n \int_0^1 x^n f(x)dx$ est convergente de somme $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x}dx$. Qu'obtient-on si f est constante égale à 1 sur $[0,1]$?

Exercice 14 (**)
Soit f continue décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Nature de la série $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,\sin t\; dt$.

Exercice 15 (**)
Montrer que le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ par elle-même est convergent.

Exercice 16 (*Transformation d'Abel)**

1) Soit (a_n) et (b_n) deux suites complexes. On note (B_n) la suite des sommes partielles de $\sum b_n$.
Montrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$:
$$\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}b_{n+k} = \sum_{k=1}^{p}(a_{n+k} - a_{n+k+1})B_{n+k} - a_{n+1}B_n + a_{n+p+1}B_{n+p}.$$
En déduire que si (B_n) est bornée, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\sum(a_{n+1} - a_n)$ est absolument convergente, alors $\sum a_n b_n$ est convergente.
À quoi peut-on ramener ces conditions si (a_n) converge vers 0 en décroissant ?
2) On suppose que $\sum u_n$ est une série complexe convergente.
Montrer que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge également.
3) Étudier $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 17 (Exemples de sommations par tranches)**
Étudier les séries de terme général

1) $\frac{1}{n}\cos\frac{2n\pi}{3}$
2) $1 - n^{1/p(n)}$, où $p(n)$ désigne le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n.
3) $u_{3p} = -\frac{2}{3p}$, $u_n = 1/n$ sinon
4) $u_n = 1/n^\alpha$ si l'écriture décimale de n ne comporte pas de 1, $u_n = 0$ sinon.

Exercice 18 (*Règle de la loupe)**
Soit (u_n) une suite de réels positifs décroissante.

1) Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum 2^n u_{2^n}$ est convergente (**règle de la loupe**).
2) Retrouver que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ et $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ convergent si et seulement si $p > 1$.

Exercice 19 (**)
Les familles suivantes sont-elles sommables ?

1) $(x)_{x\in\mathbb{D}\cap[0,1]}$
2) $(1/x^2)_{x\in\mathbb{Q}_+^*}$
3) $(a^n)_{n\in\mathbb{Z}}$
4) $(1/(p^2+q^2)^\alpha)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$
5) $(1/(p+q)^\alpha)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$

Exercice 20 (**)
Montrer que les familles suivantes sont sommables et calculer leurs sommes :

1) $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $|q| < 1$
2) $(r^{|n|}e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ avec $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$
3) $\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$

Exercice 21 (**)
Montrer par calculs de sommes que les familles suivantes ne sont pas sommables :

1) $\left(\frac{1}{p^2-q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*, p\neq q}$
2) $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ avec $a_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}$

Exercice 22 (***)
Calculer les sommes suivantes (utiliser $\zeta(2) = \pi^2/6$ et $\zeta(4) = \pi^4/90$) :

1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$
2) $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\sum\limits_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$
3) $\sum\limits_{(p,q)\in A} \frac{1}{p^2q^2}$ où $A = (\mathbb{N}^*)^2$, puis $A = \{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ p \text{ divise } q\}$, et enfin $A = \{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ p\wedge q = 1\}$

Exercice 23 (**)
Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

1) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$ est convergente,
2) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ est divergente,
3) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ est divergente, en étudiant $(S_{2n} - S_n)$, où (S_n) est la suite des sommes partielles associée.

Exercice 24 (**)

1) Montrer que tout naturel p non nul s'écrit de manière unique sous la forme $2^n(2k+1)$ avec k et n naturels.
2) Pour $|z| < 1$, montrer que : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}$.

Exercice 25 (***)
Montrer que pour tout $|x| < 1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$ où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

II Exercices supplémentaires

1) Exemples d'études de convergence

Exercice 26 (Exemple à paramètre)**
Déterminer en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^\alpha}$.

Exercice 27 (Lien suite-série)**
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs ou nuls. Soit $u_0 > 0$.
On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$.
Montrer que la série $\sum a_n$ converge ssi la suite (u_n) converge.

Exercice 28 (Suites trigonométriques)**

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la suite (u_n) définie par $u_n = \cos(nx)$ converge-t-elle ?
   Indication : on cherchera des relations entre u_n, u_{n+1} et u_{n+2} d'une part, u_n et u_{2n} d'autre part. Ensuite, on fera un raisonnement par analyse-synthèse.
2. Faire de même avec la suite $v_n = \sin(nx)$ (en utilisant le résultat de la question précédente).
3. En déduire les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la suite complexe $z_n = e^{inx}$ converge.

Exercice 29 (Séries de Bertrand)**

1. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n \ln^{\beta}(n)}$ converge ssi $\beta > 1$.
   On pensera à des comparaisons séries-intégrales...
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta}(n)}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 30 (Règle de Raabe-Duhamel)**
Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que (v_n) est aussi une suite de réels strictement positifs et qu'à partir d'un certain rang, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
   Montrer que (u_n) est dominée par (v_n).
2. (a) On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   À l'aide d'une comparaison à une série de Riemann, montrer la convergence de $\sum u_n$.
   (b) On suppose ici qu'il existe $\alpha < 1$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   Montrer que $\sum u_n$ diverge.
   (c) **Application** : Soit $a \in \mathbb{R}$.
   Étudier la convergence absolue de la série de terme général $u_n = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$.

2) Calculs de sommes

Exercice 31 (Sommes trigonométriques)**
Soient x et $\theta \in \mathbb{R}$.
Étudier la convergence et calculer la somme des séries $\sum x^n \cos(n\theta)$ et $\sum x^n \sin(n\theta)$.

Exercice 32 (*Exemple à paramètre)
Déterminer des réels a et b tels que la série de terme général $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ converge.
Calculer alors sa somme.

Exercice 33 (Calculs de sommes fractionnaires)**

1. Calculer $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n^2-1)}$.
2. On note P_k le polynôme de degré k défini par : $P_k(X) = X(X-1)\cdots\big(X-(k-1)\big)$.
   (a) Calculer $\sigma_k = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{P_k(n)}{n!}$. *On admettra que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.
   (b) En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n^2+n+1}{n!}$.

Exercice 34 (Avec des parties entières)**
Étudier la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$.

Exercice 35 (Calcul à partir de la série harmonique)**
Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(2n-1)}$, et calculer sa somme en utilisant le développement asymptotique bien connu de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 36 (*Utilisation d'un produit de Cauchy)
Soit $a \in]-1, 1[$. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na^n$ (après avoir justifié la convergence !) à l'aide d'un produit de Cauchy.

3) Sommabilité

Exercice 37 (Des exemples de produits de Cauchy)**

1. Montrer que le produit de Cauchy de la série semi-convergente $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ par elle-même est une série divergente.
2. Montrer que le produit de Cauchy de la série semi-convergente $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ par elle-même est une série convergente.

Exercice 38 (Sommation de la fonction zeta)**

Montrer que la série $\sum\limits_{p\geq 2} \big(\zeta(p)-1\big)$ converge et calculer sa somme.

La fonction ζ de Riemann est définie pour $s \in]1,+\infty[$ par $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Exercice 39 (Sommation de restes)**

1. Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a-t-elle un sens ?
3. Montrer qu'alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$.

Exercice 40 (Suite double)**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite double $\left(\dfrac{z^{2p}}{q^{2p+2}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable ssi $|z| < 1$ et, lorsqu'elle est sommable, montrer que sa somme vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2-z^2}$.

Exercice 41 (*Non interversion des sommations)**

Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on pose $a_{n,p} = \frac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.
Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_{n,p}$ et $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{n,p}$ (*on admettra que* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$). Commenter le résultat.

4) Recherche d'équivalents

Exercice 42 (*Equivalent de somme partielle)

On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} e^{-\frac{k}{k+1}}$. Calculer un équivalent simple de S_n.

Exercice 43 (Equivalent de somme partielle 2)**

Prouver qu'on a $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \sim \ln\big(\ln(n)\big)$.

Exercice 44 (Développement asymptotique de somme partielle)**

On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$.
Déterminer un équivalent simple de S_n puis montrer qu'on peut former un développement asymptotique de la forme $S_n = \ln(n) + C + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$, où C est une constante.

Exercice 45 (*Equivalent de reste)

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!}$.
Déterminer un équivalent simple de R_n. *Indication : penser à un télescopage.*

Exercice 46 (Un oral de CCINP)**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{3^n n!}\prod_{k=1}^{n}(3k-2)$ et $v_n = \dfrac{1}{n^{3/4}}$.

1. À l'aide d'un développement asymptotique, montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang.
2. En utilisant la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$, montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
3. En considérant la série de terme général $w_n = \dfrac{2}{3}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{2/3}}$.

Exercice 47 (Fausses séries)**

1. Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}$.
2. Pour α réel, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+n}\right)^\alpha$. Déterminer un équivalent de S_n.

Exercice 48 (*Une variante pour établir la formule de Stirling)**

1. Montrer que si f est une application de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ alors :
$$\forall n \geq 2,\ \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) = -\int_{n-1}^{n}(t-n+1)f'(t)dt.$$
2. On note, pour $n \geq 2$, $w_n = \int_{n-1}^{n}\ln(t)dt - \ln(n)$.
   (a) En utilisant le résultat de la question précédente, montrer qu'on a :
   $$\forall n \geq 2,\ w_n = -\frac{1}{2n} - \frac{1}{2}\int_{n-1}^{n}(t-n+1)^2\frac{1}{t^2}dt.$$
   (b) On note $x_n = \int_{n-1}^{n}(t-n+1)^2\frac{1}{t^2}dt$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 2} x_n$ converge.
   (c) En déduire l'existence d'une constante $K > 0$ telle que :
   $$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + K + o(1).$$
   (d) En déduire un équivalent de $n!$ en fonction de K.

Remarque

Pour retrouver la formule de Stirling dans son intégralité, il reste une constante à déterminer. On peut par exemple utiliser les intégrales de Wallis $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$ *pour cela.*

Exercice 49 (*Une suite récurrente)**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

1. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (monotonie et convergence).
2. En considérant la suite $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)$ pour α bien choisi, déterminer un équivalent de u_n.
3. La série de terme général u_n est-elle convergente ?

Remarque

Dans les concours les plus ambitieux, la méthode permettant de déterminer un équivalent de u_n *n'est pas forcément donnée. Il faut retenir que cette idée peut être testée pour des suites définies par une relation de récurrence* $u_{n+1} = f(u_n)$ *avec* $u_n \to 0$ *et* $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Exercice 50 (Fonction zeta de Riemann)**
On considère la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ pour $s \in \mathbb{C}$.

1. Pour quelles valeurs réelles de s la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^s}$ est-elle convergente ?
2. Quel est le domaine d'absolue convergence de cette série dans $\mathbb{C}$?
   On note ζ la fonction $\zeta : s \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^s}$ sur le domaine ainsi déterminé.
3. Déterminer la limite de $\zeta(s)$ lorsque $s \to +\infty$.
4. Pour s réel, déterminer un équivalent de $\zeta(s)$ lorsque $s \to 1^+$.

III Exercices sur la dénombrabilité

Exercice 51 (Reconnaissance du caractère dénombrable (ou pas))**
Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ? Justifier.

1. L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux.
2. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2},\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$.
3. L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

Exercice 52 (Ensemble infini et partie dénombrable)**
Démontrer que tout ensemble infini contient une partie dénombrable (*s'inspirer d'une démo. du cours*).

Exercice 53 (Critère pour un ensemble au plus dénombrable)**

1. Démontrer qu'un ensemble I est au plus dénombrable ssi il existe une suite croissante $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I dont la réunion est égale à I.
2. *Applications* : utiliser ce critère pour démontrer ou redémontrer les résultats suivants :
   $\mathbb{Z}$ est dénombrable, $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, $\mathbb{Z}[X]$ est dénombrable.

Exercice 54 (Nombres algébriques)**
On dit d'un nombre complexe z qu'il est *algébrique* lorsqu'il est racine d'un polynôme **non nul** à coefficients rationnels.

1. Donner divers exemples de nombres algébriques.
2. Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est dénombrable.
3. Que dire de l'ensemble des nombres algébriques ?