DS14 du 28/03/2026 (4h)
Corrigé du sujet B (MPI)

Exercice 1 :

1. Pour tout réel $t \neq 0$, on a
$$\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{0}{t} = 0, \qquad \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \frac{t^2}{t} = t,$$
donc
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.$$
Ceci montre que f possède des dérivées partielles premières en $(0,0)$ et
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.$$

2. **Analyse** : si f est différentiable en $(0,0)$, alors la seule différentielle possible est l'application linéaire
$$L : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)v = 0 \end{array} \right. .$$
Attention ! L'existence des dérivées partielles en $(0,0)$ ne garantit pas la différentiabilité, cela donne juste la seule différentielle possible.
Synthèse : montrons que f est différentiable en $(0,0)$ avec $df(0,0) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}$: on a
$$f((0,0)+(u,v)) = f(u,v) = \frac{v^4}{u^2+v^2} \leq \frac{\|(u,v)\|_2^4}{\|(u,v)\|_2^2} = \|(u,v)\|_2^2 = o(\|(u,v)\|_2),$$
donc $f((0,0)+(u,v)) = f(0,0) + 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}(u,v) + o(\|(u,v)\|_2)$, ce qu'il fallait montrer.

3. En tant que fonction rationnelle (de deux variables) bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc $\mathcal{C}^1$, en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Sur cet ouvert, les dérivées partielles de f se calculent classiquement (dérivation d'un quotient) :
$$\forall (x,y) \neq (0,0), \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^5+4y^3x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
De plus, on sait d'après la première question que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.
Reste à étudier la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$: pour tout $(x,y) \neq (0,0)$:
$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| = \frac{2|x|y^4}{\|(x,y)\|_2^4} \leq \frac{2\|(x,y)\|_2^5}{\|(x,y)\|_2^4} = 2\|(x,y)\|_2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,$$
et de même :
$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| \leq \frac{6\|(x,y)\|_2^5}{\|(x,y)\|_2^4} = 6\|(x,y)\|_2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0,$$
donc les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bien continues en $(0,0)$, et finalement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 :

1. Etude de fonction simple : en étudiant le signe de $\varphi' : t \mapsto 2t(3t-1)$ sur $[-1,1]$, on obtient que φ est croissante sur $[-1,0]$, décroissante sur $[0,1/3]$ et croissante sur $[1/3,1]$, avec un minimum en -1 (qui vaut -2), et un maximum en 1 (qui vaut 2).
2. (a) Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, la fonction $f : (x,y) \mapsto x^3+y^2$ (qui est bien $\mathcal{C}^1$ car polynomiale) possède un seul point critique : $(0,0)$ (facile en calculant les deux dérivées partielles).
   Si f possède un extremum local sur $\mathbb{R}^2$, c'est donc seulement en $(0,0)$. Mais ce n'est pas le cas car par exemple, $f(t,0)=t^3$ change de signe dans tout voisinage $[-r,r]$ de 0.
   Ceci montre que f ne possède pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

   (b) Vu que $f(t,0)=t^3$ n'est ni majorée ni minorée sur $\mathbb{R}$, la fonction f ne possède pas d'extremum global sur $\mathbb{R}^2$.

   (c) Le disque fermé $\mathcal{D}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ (car fermé et borné) et la fonction f est continue, donc d'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses extrema sur $\mathcal{D}$.
   Si ces extrema étaient atteints sur l'ouvert $\mathring{\mathcal{D}} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2<4\}$, alors ce serait nécessairement en un point critique, donc en $(0,0)$. Mais on a déjà montré que f n'atteint pas d'extremum local en $(0,0)$, donc les extrema de f sur $\mathcal{D}$ sont atteints sur $\mathcal{D}\setminus\mathring{\mathcal{D}} = \mathcal{C}$.

   (d) Les points de $\mathcal{C}$ sont les $(2\cos(t),2\sin(t))$ avec $t\in[-\pi,\pi]$. Or,
   $$f(2\cos(t),2\sin(t)) = 8\cos^3(t)+4\sin^2(t) = 4\left(2\cos^3(t)-\cos^2(t)+1\right) = 4\varphi(\cos(t)),$$
   donc
   $$\max_{\mathcal{D}}(f) = \max_{\mathcal{C}}(f) = \max_{t\in[-\pi,\pi]}(4\varphi(\cos(t))) = 4\max_{u\in[-1,1]}\varphi(u) = 4\times 2 = 8$$
   (atteint en $u=\cos(t)=1$ donc au point $(2,0)$),
   $$\min_{\mathcal{D}}(f) = \min_{\mathcal{C}}(f) = \min_{t\in[-\pi,\pi]}(4\varphi(\cos(t))) = 4\min_{u\in[-1,1]}\varphi(u) = 4\times(-2) = -8$$
   (atteint en $u=\cos(t)=-1$ donc au point $(-2,0)$).

Exercice 3 :

1. La fonction $(x,y)\mapsto x^2-y^2$ est polynomiale donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc différentiable, ce qui montre par composition que f est différentiable.
   Pour ce qui est de g : ses deux composantes $(x,y)\mapsto x+y$ et $(x,y)\mapsto x-y$ sont différentiables car polynomiale, donc g est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. De plus pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:
   $$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2-y^2) & -2y\cos(x^2-y^2)\end{pmatrix}, \qquad J_g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$
2. (a) Puisque $f\circ g : (x,y)\mapsto \sin(4xy)$, on a
   $$d(f\circ g)(x,y) : (u,v) \mapsto \frac{\partial(f\circ g)}{\partial x}(x,y)u + \frac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(x,y)v = 4y\cos(4xy)u + 4x\cos(4xy)v.$$

   (b) Puisque $d(f\circ g)(x,y) = df(g(x,y))\circ dg(x,y)$, on en déduit :
   $$J_{f\circ g}(x,y) = J_f(x+y,x-y)\times J_g(x,y)$$
   $$= \begin{pmatrix} 2(x+y)\cos((x+y)^2-(x-y)^2) & -2(x-y)\cos((x+y)^2-(x-y)^2)\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 4y\cos(4xy) & 4x\cos(4xy)\end{pmatrix},$$
   et on retrouve bien
   $$d(f\circ g)(x,y) : (u,v)\mapsto J_{f\circ g}(x,y)\times\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix} = 4y\cos(4xy)u + 4x\cos(4xy)v.$$

Exercice 4 : Etude de séries de Pile ou Face

Corrigé de M. Groux

Partie I - Étude de la longueur de la première série

1. D'après le cours, la série entière $\sum_{k\geq 0} x^k$ a $\boxed{\text{un rayon de convergence égal à 1}}$ et a pour somme la fonction $\boxed{x \mapsto \dfrac{1}{1-x}}$.

2. D'après le cours, la somme d'une série entière de la variable réelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et les dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme. En particulier, soit $x \in]-1,1[$. La série de terme général kx^{k-1}, $k \in \mathbb{N}^*$, converge de somme $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. En multipliant par x et en constatant que le terme d'indice $k=0$ est nul, on en conclut que $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geq 0} kx^k \text{ converge et qu'on a } \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \dfrac{x}{(1-x)^2}}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'évènement $(L_1 = k)$ est réalisé si et seulement si la première série est de longueur k, c'est-à-dire les k premiers lancers donnent le même résultat et le $(k+1)$-ième lancer donne un résultat différent. On a donc
$$\boxed{(L_1 = k) = (P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1})}.$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}$ et $F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}$ étant incompatibles, on a
$$P(L_1 = k) = P\left(P_1 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}\right) + P\left(F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}\right).$$
Par indépendance des lancers, on a alors
$$P(L_1 = k) = P(P_1)\times\ldots\times P(P_k)\times P(F_{k+1}) + P(F_1)\times\ldots\times P(F_k)\times P(P_{k+1}) = \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2}{2^{k+1}}$$
d'où $\boxed{P(L_1 = k) = 2^{-k}}$.

5. Par définition, la variable aléatoire L_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. La série de terme général $P(L_1 = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge donc de somme 1. On a alors $P(L_1 = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}$. Or, $\dfrac{1}{2}$ appartient à l'intervalle $]-1,1[$ donc, d'après la question 14, on a
$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1\,.$$
On a ainsi $\boxed{P(L_1 = 0) = 0}$.

6. D'après la question 17, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $kP(L_1 = k) = k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$. Cette égalité est aussi valable lorsque $k = 0$. Or, d'après la question 15, la série $\sum_{k\geq 0} k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ converge de somme $\dfrac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$. En particulier, la série de terme général $kP(L_1 = k)$, $k \in \mathbb{N}$, converge donc, par positivité, converge absolument de somme 2, ce qui signifie que $\boxed{L_1 \text{ admet une espérance égale à 2}}$. Ainsi, en moyenne, la première série dans la suite de lancers est de longueur 2.

Partie II - Étude du nombre de séries

7. La variable aléatoire N_1 représente le nombre de séries apparues en un lancer, elle ne peut donc prendre que la valeur 1.
La variable aléatoire N_2 représente le nombre de séries apparues lors des deux premiers lancers, elle prend donc la valeur 1 si les 2 premiers lancers donnent le même résultat, la valeur 2 s'ils donnent des résultats différents. On a

$$\begin{aligned} P(N_2 = 1) &= P((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)) \\ &= P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2) \qquad \text{(incompatibilité)} \\ &= P(P_1)P(P_2) + P(F_1)P(F_2) \qquad \text{(indépendance)} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

On a donc nécessairement $P(N_2 = 2) = 1 - P(N_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
En conclusion, $\boxed{N_1 \text{ suit la loi certaine de valeur } 1}$ et $\boxed{N_2 \text{ suit la loi uniforme sur } \{1;2\}}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Au cours des n premiers lancers, au moins une série apparaît (celle contenant le résultat du premier lancer) et, au maximum, n séries apparaissent (car chaque série contient au moins un résultat). $\boxed{\text{La variable aléatoire } N_n \text{ prend donc ses valeurs dans l'ensemble } [\![1, n]\!]}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. Si l'évènement $P_n \cap P_{n+1}$ est réalisé, alors le n-ième et le $(n+1)$-ième lancers donnent le même résultat, donc le $(n+1)$-ième résultat contribue à la série contenant le n-ième résultat et on a $N_n = N_{n+1}$. On a donc l'égalité d'évènements

$$\boxed{(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1}}\,.$$

Puisque les évènements $(N_n = k)$ et P_n sont indépendants du $(n+1)$-ième lancer, on en déduit que

$$P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = P((N_n = k) \cap P_n)P(P_{n+1}) = \boxed{\frac{1}{2}P((N_n = k) \cap P_n)}\,.$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les évènements $P_n \cap P_{n+1}$, $F_n \cap F_{n+1}$, $F_n \cap P_{n+1}$ et $P_n \cap F_{n+1}$ décrivent les quatre résultats possibles pour les n-ième et $(n+1)$-ième lancers. Ils sont donc deux à deux incompatibles et ont pour réunion l'évènement certain, formant ainsi un système complet d'évènements.
Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$\begin{aligned} P(N_{n+1} = k) &= P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) \\ &\quad + P((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) + P((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap P_n) + \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap F_n) \\ &\quad + \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap F_n) + \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap P_n) \quad \text{(question 22)} \\ &= \frac{1}{2}P((N_n = k) \cap (P_n \cup F_n)) + \frac{1}{2}P((N_n = k-1) \cap (P_n \cup F_n)) \qquad \text{(incompatibilité)} \end{aligned}$$

d'où $\boxed{P(N_{n+1} = k) = \dfrac{1}{2}P(N_n = k) + \dfrac{1}{2}P(N_n = k-1)}$.

11. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 23, on a

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} P(N_{n+1} = k)x^k &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1)\right) x^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k)x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k-1)x^k\,. \end{aligned}$$

Or, on a $P(N_n = n+1) = 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k)x^k = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)x^k = G_n(x)$. Par ailleurs, en effectuant un changement d'indice dans la seconde somme, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k-1)x^k = \sum_{j=0}^{n} P(N_n = j)x^{j+1} = x\sum_{j=0}^{n} P(N_n = j)x^j = xG_n(x)$$

car $P(N_n = 0) = 0$. On en conclut qu'on a $\boxed{G_{n+1}(x) = \frac{1}{2}G_n(x) + \frac{1}{2}xG_n(x) = \frac{1+x}{2}G_n(x)}$.

12. Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(G_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $\dfrac{1+x}{2}$ et de premier terme $G_1(x) = x$.

    On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{G_n(x) = x\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}}$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme définissant G_n étant finie, la fonction G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le cours, $\boxed{N_n \text{ admet une espérance égale à } G_n'(1)}$.
    Soit un entier $n \geq 2$. D'après la question 25, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

    $$G_n'(x) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} + x.(n-1).\frac{1}{2}.\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}$$

    donc, en particulier, on a $G_n'(1) = 1 + \dfrac{n-1}{2} = \dfrac{n+1}{2}$. Lorsque $n = 1$, on a $G_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $G_1'(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
    En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{\mathbb{E}(N_n) = G_n'(1) = \frac{n+1}{2}}$.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que la variable aléatoire N_n prend ses valeurs dans l'ensemble $[\![1, n]\!]$. La fonction G_n est polynomiale sur $\mathbb{R}$. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

    $$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)x^k\,.$$

    Par ailleurs, d'après la question 25, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

    $$G_n(x) = x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{1}{2^{n-1}}x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{n-1}}x^k\,.$$

    Par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale sur un intervalle, $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, n]\!],}$ $\boxed{\text{on a } P(N_n = k) = \frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{k-1}}$. Cela détermine la loi de N_n.

Exercice 5 : Une loi forte des grands nombres

Adaptation du corrigé de C. Antonini

1. La variable aléatoire vérifie $0 \leq |X| \leq 1$. Puisque 1 (variable aléatoire constante) possède une espérance, on en déduit par comparaison que X est d'espérance finie.
2. Si $t > 0$, la fonction $x \mapsto e^{tnx}$ est strictement croissante (et sa réciproque aussi) donc on a $\forall (x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$, $x \geq \varepsilon \;\Leftrightarrow\; e^{tnx} \geq e^{tn\varepsilon}$.
Ainsi, il y a égalité entre les événements $(S_n \geq \varepsilon)$ et $(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon})$, leurs probabilités sont donc les mêmes.
L'encadrement de $|X|$ (donc de chaque X_i) implique $|ntS_n| = |\underbrace{t}_{>0}||X_1 + ... + X_n|) \leq nt$, donc $0 \leq e^{ntS_n} \leq e^{nt}$.
Tout comme X dans Q1, on en déduit que e^{nS_n} admet une espérance (il faut remplacer les 1 par des $e^{nt} = \textit{constante}$...)
Et la v.a. $Y = e^{nS_n}$ est clairement positive, donc on peut lui appliquer l'inégalité de Markov (avec $\alpha = e^{nt\varepsilon} > 0$). On aboutit ainsi à
$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(e^{ntS_n} \geq e^{nt\varepsilon}) \leq \frac{\mathbf{E}(e^{tnS_n})}{e^{nt\varepsilon}} \quad (*).$$
Enfin, $tnS_n = tX_1 + ... + tX_n$ donc $e^{tnS_n} = e^{tX_1}...e^{tX_n}$. Par indépendance mutuelle des (X_i), les $(e^{tX_i})_{1\leq i\leq n}$ sont des v.a. mutuellement indépendantes (et possédant toutes une espérance) donc le produit possède une espérance et espérance du produit = produit des espérances :
$$\mathbf{E}(e^{ntS_n}) = \mathbf{E}(e^{tX_1}...e^{tX_n}) = \mathbf{E}(e^{tX_1})...\mathbf{E}(e^{tX_n}).$$
Toutes les v.a. X_i ont la même loi (celle de X), donc les e^{tX_i} ont toute la même loi (celle de e^{tX}) donc $\forall i$, $\mathbf{E}(e^{tX_i}) = \mathbf{E}(e^{tX})$ et finalement
$$\mathbf{E}(e^{ntS_n}) = \mathbf{E}(e^{tX_1}...e^{tX_n}) = \mathbf{E}(e^{tX})...\mathbf{E}(e^{tX}) = (\mathbf{E}(e^{tX}))^n.$$
En combinant avec $(*)$ on trouve le résultat demandé.
3. (a) La fonction $x \mapsto a^x = e^{x\ln(a)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \ln(a).e^{x\ln(a)} = \ln(a).a^x$. On obtient alors g_a par ajout d'une fonction affine, elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. La fonction g_a est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a'(x) = \frac{-1}{2}a^{-1} + \frac{1}{2}a - \ln(a)a^x$$
On peut redériver (justification donnée plus haut) et écrire
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a''(x) = -[\ln(a)]^2 a^x < 0,$$
donc affirmer que g_a' est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) On constate comme annoncé par l'énoncé que $g_a(-1) = 1.a^{-1} - a^{-1} = 0$ et que $g_a(1) = 1.a - a^1 = 0$ ($-g_a$ correspond à la fonction $x \mapsto a^x$ à laquelle on a enlevé la fonction affine passant par ses points d'abscisses -1 et 1).
Les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées, on en déduit l'existence d'un point $c \in]-1, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.
Puisque g_a' est décroissante, on en déduit $g_a' \leq 0$ (donc g_a décroissante) sur $[c, +\infty[$ et $g_a' \geq 0$ (donc g_a croissante) sur $[c, +\infty[$.
Notamment, soit $x \in [-1, 1]$ (on distingue deux cas, selon x inférieur ou supérieur à c) :
— La fonction g_a est croissante sur $[-1, c]$ donc si $x \in [-1, c]$, on a $g_a(x) \geq g_a(-1) = 0$.
— La fonction g_a est décroissante sur $[c, 1]$ donc si $x \in [c, 1]$, on a $g_a(x) \geq g_a(1) = 0$.
Le résultat est ainsi démontré.

Remarque
On peut aussi procéder par convexité : puisque $g_a'' \leq 0$, la fonction g_a est concave donc au-dessus de toutes ses cordes (faire un dessin). Or, la corde joignant les points $(-1, g_a(-1)) = (-1, 0)$ et $(1, g_a(1)) = (1, 0)$ est la droite horizontale $y = 0$, donc $g_a \geq 0$.

4. On choisit $a = e^t > 1$ (au passage, l'hypothèse $a > 0$ aurait suffi à la question précédente) donc par Q3(b),
$$\forall x \in [-1,1], \quad g_{e^t}(x) = \frac{1-x}{2}\underbrace{(e^t)^{-1}}_{=e^{-t}} + \frac{1+x}{2}e^t - \underbrace{(e^t)^x}_{=e^{tx}} \geq 0$$
Le résultat demandé en découle instantanément.

5. La variable aléatoire X est à valeurs dans $[-1,1]$ donc par Q4 (et pour tout $t > 0$)
$$e^{tX} \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t$$
Nous avons prouvé que e^{tX} et X possèdent une espérance (et la v.a. constante égale à 1 en possède aussi une), donc par linéarité le 2nd membre de l'inégalité admet une espérance, et finalement par croissance puis linéarité, nous pouvons écrire (toujours pour tout $t > 0$)
$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leq \mathbf{E}\left[\frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t\right] = \frac{\mathbf{E}(1) - \mathbf{E}(X)}{2}e^{-t} + \frac{\mathbf{E}(1) + \mathbf{E}(X)}{2}e^t$$
Naturellement, $\mathbf{E}(1) = 1$... et on a depuis Q2 l'hypothèse X centrée, i.e. $\mathbf{E}(X) = 0$, donc
$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leq \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t = \mathrm{ch}(t).$$

6. (a) Il y a t^{2k} dans chaque terme, comparons donc $(2k)!$ et $2^k.k!$.
Montrons par récurrence sur k que $\dfrac{(2k)!}{2^k k!} \geq 1$.
— Pour $k = 0$, on a $\dfrac{(2k)!}{2^k k!} = \dfrac{0!}{2^0 0!} = 1$, d'où l'initialisation.
— Si le résultat est vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors
$$\frac{(2(k+1))!}{2^{k+1}(k+1)!} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \cdot \frac{(2k+2)(2k+1)}{2(k+1)} = \underbrace{\frac{(2k)!}{2^k k!}}_{\geq 1} \cdot \underbrace{(2k+2)}_{\geq 1} \geq 1,$$
d'où l'hérédité.
La propriété est ainsi vraie pour tout k.
On en déduit immédiatement que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(2k)!} \leq \dfrac{1}{2^k k!}$, d'où l'inégalité demandée en multipliant par $t^{2k} \geq 0$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$).

(b) On reconnaît les termes généraux de séries entières qui CV pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc en sommant ces inégalités on trouve $\forall t \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^k}{k!},$$
et on reconnaît
$$\mathrm{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$$
(pour le 2nd membre, on peut partir de $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ et identifier z à $t^2/2$)
Puisque par Q5 on a (pour tout $t > 0$) $\mathbf{E}(e^{tX}) \leq \mathrm{ch}(t)$ et que $\mathrm{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$ pour tout t, on en déduit immédiatement le résultat :
$$\forall t > 0, \quad \mathbf{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$$

7. La fonction *exp* étant strictement croissante, on peut affirmer que $t \mapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ admet un minimum ssi $t \mapsto -nt\varepsilon + nt^2/2$ admet un minimum.
L'étude est extrêmement simple (on peut aussi reconnaître un trinôme du 2nd degré !), le minimum est atteint en $t = \varepsilon$.
REM : Si on note $\rho(t) = e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$, on peut donc écrire $\forall t \in \mathbb{R}$, $\rho(t) \geq \rho(\varepsilon) = e^{-n\varepsilon^2/2}$

8. En combinant Q2 et Q6(b) on peut écrire $\forall t > 0$,

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{[\mathbf{E}(e^{tX})]^n}{e^{tn\varepsilon}} \leq [e^{t^2/2}]^n e^{tn\varepsilon} = e^{nt^2/2 - nt\varepsilon}.$$

On reconnaît la fonction ρ étudiée en Q7.
En se rappelant que le résultat ci-dessus est valable pour tout $t > 0$, on prend la valeur de t qui minimise la fonction ρ, c'est-à-dire que l'on spécialise le résultat en $t = \varepsilon > 0$ et on obtient

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{n\varepsilon^2/2 - n\varepsilon^2} = e^{-n\varepsilon^2/2},$$

CQFD.

Si l'on remplaçait les X_i par $-X_i$ et donc S_n par $-S_n$, toutes les hypothèses (notamment X à valeurs dans $[-1, 1]$ et X centrée) resteraient respectées.
On en déduit que l'on a aussi

$$\mathbf{P}(S_n \leq -\varepsilon) = \mathbf{P}(-S_n \geq \varepsilon) \leq e^{n\varepsilon^2/2 - n\varepsilon^2} = e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Or l'événement $(|S_n| \geq \varepsilon)$ est l'union disjointe de $(S_n \leq -\varepsilon)$ et de $(S_n \geq \varepsilon)$, donc

$$\mathbf{P}(|S_n \geq \varepsilon|) = \mathbf{P}(S_n \leq -\varepsilon) + \mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

9. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mathbf{P}(|S_n > \varepsilon|) \leq \mathbf{P}(|S_n \geq \varepsilon|) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2} = 2(e^{-\varepsilon^2/2})^n$.
La série $\sum_{n\geq 0} 2(e^{-\varepsilon^2/2})^n$ converge (série géométrique, de raison $e^{-\varepsilon^2/2} \in]0, 1[$) donc par comparaison pour séries de termes généraux positifs, la série de terme général $\mathbf{P}(|S_n \geq \varepsilon|)$ converge.

10. Notons pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A_m = \{\omega \in \Omega \ ; \ |S_m(\omega)| > \varepsilon\}$, que l'on peut aussi noter

$$A_m = (|S_m| > \varepsilon).$$

On a $\forall m \in \mathbb{N}$, A_m est un événement (si l'on préfère, B_m est un élément de $\mathcal{A}$, la tribu).
Ainsi, $B_n = \bigcup_{m\geq n} A_m$ est une réunion dénombrable d'événements, donc est un événement.

L'union définissant B_n n'est pas disjointe, on peut tout-de-même écrire l'encadrement :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad 0 \leq \mathbf{P}(B_n) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon).$$

Le troisième membre est le RESTE (d'ordre $n-1$) d'une série convergente (cf Q9), donc $\sum_{m=n}^{+\infty} \mathbf{P}(|S_n| > \mathrm{e}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Par théorème d'encadrement, on en déduit que $\mathbf{P}(B_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Finalement, puisque $B_{n+1} \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit par continuité décroissante :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0.$$

11. (a) On peut écrire pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\Omega_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{m\geq n} (|S_m| \leq \frac{1}{k})\right)$$

Il s'agit d'une union dénombrable d'intersection dénombrables d'événements, donc d'un événement.

Remarque

On peut aussi noter que $\displaystyle\bigcap_{m\geq n}(|S_m| \leq \frac{1}{k}) = \overline{\bigcup_{m\geq n}(|S_m| > \frac{1}{k})} = \overline{B_n}$ *en prenant* $\varepsilon = 1/k$ *dans la définition de* B_n *dans Q10 (je note* $\overline{C} = \Omega \setminus C$ *pour tout événement* C*)*

On a donc $\displaystyle\Omega_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{B_{n,1/k}}$ *est une union dénombrable d'événements.*

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Rappelons que la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ est

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*\ :\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n\ \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon.$$

On peut remplacer $\varepsilon > 0$ par une suite de réels > 0 de limite nulle par exemple $\varepsilon = 1/k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que la définition équivaut à

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists n \in \mathbb{N}^*\ :\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geq n\ \Rightarrow |u_n| \leq \frac{1}{k}.$$

Cela signifie tout simplement que $\displaystyle A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k$.

(c) Donc A est un événement en tant qu'intersection dénombrable d'événements.

12. Ici il faut utiliser la propriété de continuité décroissante.
Il est évident que la suite $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante au sens de l'inclusion, et comme $\displaystyle A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} \Omega_k$ on a

$$\mathbf{P}(A) = \lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(\Omega_k).$$

Or, nous avons

$$\overline{\Omega_k} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{m\geq n} [|S_m| < 1/k] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n(1/k),$$

donc d'après Q10, on en déduit $\mathbb{P}(\overline{\Omega_k}) = 0$ pour tout k, ce qui entraîne $\mathbb{P}(\Omega_k) = 1$ et donc $\mathbb{P}(A) = 1$.