

DS14 du 28/03/2026 (4h) Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de cinq exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

Exercice 1 :

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(0,0) = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \frac{y^4}{x^2 + y^2}.$$

1. Montrer que f possède des dérivées partielles premières en $(0,0)$, que l'on déterminera.
2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et déterminer $df(0,0)$.
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 ?

* * *

Exercice 2 :

1. Etudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto 2t^3 - t^2 + 1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.
2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = x^3 + y^2$, ainsi que le disque fermé de centre $(0,0)$ et de rayon 2 (pour la norme euclidienne) :

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

- (a) La fonction f possède-t-elle un extremum local sur \mathbb{R}^2 ?
- (b) La fonction f possède-t-elle un extremum global sur \mathbb{R}^2 ?
- (c) Justifier que f possède des extrema globaux dans \mathcal{D} , et qu'ils sont atteints sur le cercle \mathcal{C} de centre $(0,0)$ et de rayon 2.
- (d) En paramétrant ce cercle et en utilisant la fonction φ , déterminer les extrema globaux de f sur \mathcal{D} (en précisant les points (x,y) où ces extrema sont atteints).

* * *

Exercice 3 :

On considère les fonctions

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sin(x^2 - y^2) \end{cases}, \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{cases}.$$

1. Justifier que f et g sont différentiables en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et déterminer les matrices jacobiniennes $J_f(x,y)$ et $J_g(x,y)$.
2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer l'image d'un vecteur $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par l'application linéaire $d(f \circ g)(x,y)$ en utilisant les deux méthodes suivantes :
 - (a) En calculant $f \circ g$.
 - (b) En utilisant le produit de deux matrices jacobiniennes.

* * *

Exercice 4 : Etude de séries de Pile ou Face.

Présentation générale

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ modélisant une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face avec la probabilité $1/2$). Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par P_k l'évènement [le k -ième lancer de la pièce donne pile] et par F_k l'évènement [le k -ième lancer de la pièce donne face].

On appelle série une succession de lancers amenant le même côté de la pièce. La série n° 1 commence au premier lancer et se poursuit jusqu'à ce qu'un des lancers suivants donne un résultat différent du premier lancer. De même, la série n° 2 commence au lancer suivant la fin de la série n° 1 et se termine au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.

Voici deux exemples pour illustrer la définition des séries donnée ci-dessus :

Exemple 1 :
$$\underbrace{P_1 \cap P_2}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{F_3}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7}_{\text{Série n° 3}} \cap F_8 \cap \dots$$

Exemple 2 :
$$\underbrace{F_1 \cap F_2 \cap F_3}_{\text{Série n° 1}} \cap \underbrace{P_4 \cap P_5 \cap P_6 \cap P_7 \cap P_8}_{\text{Série n° 2}} \cap \underbrace{\left(\bigcap_{k=9}^{+\infty} F_k \right)}_{\text{Série n° 3}}$$

Partie I - Étude de la longueur de la première série

Dans cette partie, nous allons étudier la longueur de la première série. On définit la variable aléatoire L_1 de la manière suivante :

- si la série n° 1 ne se termine pas (ce qui arrive si et seulement si on obtient que des piles ou que des faces), on pose $L_1 = 0$;
- sinon, on désigne par L_1 la longueur de la série n° 1.

Ainsi, si l'évènement donné dans l'exemple 1 est réalisé, alors on a $L_1 = 2$ tandis que si l'évènement donné dans l'exemple 2 est réalisé, alors on a $L_1 = 3$.

I.1 - Calcul de la somme d'une série entière

1. Rappeler (sans le démontrer) le rayon de convergence et la somme de la série entière :

$$\sum_{k \geq 0} x^k .$$

2. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{k \geq 0} kx^k$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

I.2 - Étude de L_1

Dans cette partie, on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Exprimer l'évènement $(L_1 = k)$ en fonction des évènements P_i et F_i pour $i \in [1, k + 1]$.
4. Montrer que $\mathbb{P}(L_1 = k) = 2^{-k}$.
5. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(L_1 = 0)$.
6. Démontrer que la variable aléatoire L_1 admet une espérance, puis déterminer sa valeur. Que représente ce nombre par rapport au problème étudié dans cet exercice ?

Partie II - Étude du nombre de séries

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de séries apparues lors des n premiers lancers. Par exemple, si l'évènement de l'exemple 1 dans la présentation est réalisé, alors on a :

$$N_1 = N_2 = 1, \quad N_3 = 2, \quad N_4 = N_5 = N_6 = N_7 = 3 \quad \text{et} \quad N_8 = 4.$$

Jusqu'à la fin de l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

II.1 - Généralités

7. Déterminer les lois de N_1 et N_2 .
8. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N_n ?

II.2 - Relation de récurrence pour la loi de N_n

Dans cette sous-partie, on détermine une relation de récurrence entre la loi de N_{n+1} et la loi de N_n .

9. Soit $k \in [1, n+1]$. Justifier que l'on a l'égalité d'évènements :

$$(N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1} = (N_n = k) \cap P_n \cap P_{n+1},$$

puis en déduire que :

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n).$$

Dans la suite, on admet que l'on a pour tout $k \in [1, n+1]$ les relations :

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n),$$

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap P_n \cap F_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k-1) \cap P_n),$$

$$\mathbb{P}((N_{n+1} = k) \cap F_n \cap P_{n+1}) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_n = k-1) \cap F_n).$$

10. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements :

$$(P_n \cap P_{n+1}, F_n \cap F_{n+1}, F_n \cap P_{n+1}, P_n \cap F_{n+1})$$

et les relations précédentes, montrer que l'on a pour tout $k \in [1, n+1]$ la relation :

$$\mathbb{P}(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_n = k-1).$$

II.3 - Fonction génératrice, loi et espérance de N_n

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note $G_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction génératrice de la variable aléatoire N_m , dont on rappelle la définition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_m(x) = \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(N_m = k) x^k.$$

En particulier, on déduit des résultats précédents (on ne demande pas de le vérifier) que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G_1(x) = x.$$

11. Déduire de 10 que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2} G_n(x).$$

12. Déterminer une expression explicite de $G_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.
13. Rappeler l'expression de l'espérance de N_n en fonction de sa fonction génératrice G_n .
En déduire l'espérance de la variable aléatoire N_n .
14. Déterminer la loi de la variable aléatoire N_n à partir de l'expression de G_n .

* * *

Exercice 5 : Une loi forte des grands nombres

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et telle que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega) \in [-1, 1].$$

On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, **indépendantes et de même loi que X** .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

L'objectif est de montrer que si la variable aléatoire X est centrée, (c'est-à-dire $\mathbf{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers la constante 0.

Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Q1. On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que $|X|$ admet une espérance.

On suppose désormais que X est centrée, c'est-à-dire $\mathbf{E}(X) = 0$.

Q2. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{(\mathbf{E}(e^{tX}))^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbf{E}(e^{tX})$.

Q3. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

(a) Montrer que la fonction g_a est dérivable sur \mathbb{R} et que la fonction g'_a est décroissante sur \mathbb{R} .

(b) En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.

Q4. En déduire que

$$\forall t > 0, \forall x \in [-1, 1], \quad e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.$$

Q5. En déduire que

$$\forall t > 0, \quad \mathbf{E}(e^{tX}) \leq \text{ch } t.$$

Q6. (a) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2} \right)^k.$$

(b) En déduire que

$$\forall t > 0, \quad \mathbf{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}.$$

Majoration de $\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q7. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ atteint un minimum sur \mathbb{R} en un point que l'on précisera.

Q8. En déduire que $\mathbb{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis que

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Conclusion

Q9. Montrer que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q10. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(\varepsilon) = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega ; |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(\varepsilon)$ est un événement de \mathcal{A} et montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n(\varepsilon)\right) = 0.$$

Q11. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega ; \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall m \geq n, |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Ω_k est un événement de \mathcal{A} .

(b) Écrire l'ensemble $A = \left\{ \omega \in \Omega ; \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = 0 \right\}$ à l'aide des événements Ω_k , $k \in \mathbb{N}^*$.

(c) En déduire que A est un événement de \mathcal{A} .

Q12. Déduire des questions précédentes que $\mathbb{P}(A) = 1$.

On dit alors que la suite de variables aléatoires (S_n) converge presque sûrement vers 0.