DS13 du 14/03/2026 (4h)
Corrigé du sujet B (MPI)

Exercice 1 : Les urnes de Pólya

Corrigé de M. Carrot

Partie I - Préliminaires

1. Notons R_i (resp. B_i) l'événement "tirer une boule rouge (resp. blanche) au i-ème tirage."
   On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ et
   $$P(X_1 = 1) = P(B_1) = \frac{b}{b+r} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 0) = P(R_1) = \frac{r}{b+r}$$
   car toutes les $b + r$ boules présentes dans l'urne sont équiprobables.
2. • Sachant $X_1 = 1$, on a tiré une boule blanche au premier tirage, donc, avant le second tirage, l'urne contient $b + 1$ boules blanches et r boules rouges équiprobables, donc
   $$P_{X_1=1}(X_2 = 1) = P_{X_1=1}(B_2) = \frac{b+1}{r+b+1} \quad \text{et} \quad P_{X_1=1}(X_2 = 0) = P_{X_1=1}(R_2) = \frac{r}{r+b+1}.$$
   De même, sachant $X_1 = 0$, on a b boules blanches et $r + 1$ boules rouges équiprobables pour le deuxième tirage, donc
   $$P_{X_1=0}(X_2 = 1) = P_{X_1=0}(B_2) = \frac{b}{r+b+1} \quad \text{et} \quad P_{X_1=0}(X_2 = 0) = P_{X_1=0}(R_2) = \frac{r+1}{r+b+1}.$$
   • On a $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ et, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = 0, X_1 = 1)$, on a
   $$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) \\ &= P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 0) \\ &= \frac{r}{b+r}\frac{r+1}{b+r+1} + \frac{b}{b+r}\frac{r}{b+r+1} = \frac{r(b+r+1)}{(b+r)(b+r+1)} = \frac{r}{b+r} \end{aligned}$$
   et $P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) = \dfrac{b}{b+r}$.
3. • $S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k$ est égale au nombre de boules présentes dans l'urne au départ auquel on ajoute le nombre de boules blanches tirées au cours des n premiers tirages. Sachant que chaque fois que l'on tire une boule blanche, on en ajoute globalement une dans l'urne, S_n est égale au nombre de boules blanches présentes initialement auquel on ajoute le nombre de boules blanches ajoutées au cours des n premiers tirages. S_n représente donc le nombre de boules blanches présentes dans l'urne avant le $(n + 1)$-ième tirage.
   • Comme, à chaque tirage, il y a au moins 1 boule blanche et une boule rouge dans l'urne, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $X_k(\Omega) = \{0, 1\}$.
   D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)(\Omega) = [\![0, n]\!]$, donc $S_n(\Omega) = [\![b, b + n]\!]$. Cette formule est encore valable pour $n = 0$ (car $S_0 = b$), donc est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie II - La loi de X_n

4. Soit $k \in [\![b, n + b]\!]$.
   Sachant $S_n = k$, l'urne contient au début du $(n + 1)$-ème tirage k boules blanches.
   Comme, à chaque tirage, on ajoute exactement une boule (que la boule tirée soit blanche ou rouge), l'urne contient en tout, avant le $(n + 1)$-ème tirage, $r + b + n$ boules, donc $r + b + n - k$ boules rouges.
   D'où, comme toutes les boules présentes dans l'urne sont équiprobables,
   $$P(X_{n+1} = 1 | S_n = k) = P_{S_n=k}(B_{n+1}) = \frac{k}{r+b+n}.$$

5. Comme S_n est finie, elle admet bien une espérance.
De plus, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = k)_{k\in S_n(\Omega)} = (S_n = k)_{k\in[\![b,b+n]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=1) &= \sum_{k=b}^{b+n} P(X_{n+1}=1\cap S_n=k) = \sum_{k=b}^{b+n} P(S_n=k)P_{S_n=k}(X_{n+1}=1) \\ &= \sum_{k=b}^{b+n} P(S_n=k)\frac{k}{r+b+n} = \frac{1}{r+b+n}\sum_{k=b}^{b+n} kP(S_n=k) = \frac{E(S_n)}{r+b+n}. \end{aligned}$$

6. Montrons par récurrence forte que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, "X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$" (HR_n).
Initialisation : Pour $n=1$, d'après la question 1, on a $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{b}{r+b}\right)$, donc on a bien HR_1.
Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et supposons HR_k vérifiée pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.
Alors on a $E(X_k)=\frac{b}{b+r}$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, donc, par linéarité de l'espérance,

$$E(S_n) = b + \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = b + n\frac{b}{b+r} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}.$$

D'où, d'après la question précédente,

$$P(X_{n+1}=1) = \frac{E(S_n)}{r+b+n} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}\frac{1}{r+b+n} = \frac{b}{b+r},$$

et, comme $X_{n+1}(\Omega)=\{0,1\}$, on a $X_{n+1}\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$. On a bien HR_{n+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{b}{b+r}\right)$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

7. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a ici $S_n = 1+\sum_{k=1}^n X_k$, donc

$$(S_n=1) \Leftrightarrow 1+\sum_{k=1}^{n} X_k = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k = 0 \Leftrightarrow \forall k\in[\![1,n]\!],\ X_k=0$$

car toutes les variables X_k sont positives, et une somme de positifs est nulle si et seulement si chacun des termes de la somme est nul.

8. On a donc

$$\begin{aligned} P(S_n=1) &= P\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k=0)\right) \\ &= P(X_1=0)P_{X_1=0}(X_2=0)\times\cdots\times P_{X_1=0\cap\ldots\cap X_{n-1}=0}(X_n=0) \quad \text{(formule des proba. composées)} \\ &= P(X_1=0)\times\prod_{k=1}^{n-1} P_{X_1=0\cap\ldots\cap X_k=0}(X_{k+1}=0) \\ &= \frac{1}{2}\times\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1+k}{2+k} = \frac{1}{n+1} \quad \text{(télescopage)} \end{aligned}$$

car, pour tout $k\in[\![1,n-1]\!]$, sachant $X_1=0\cap\ldots\cap X_k=0$, on a tiré k boules rouges, donc ajouté k boules rouges, et l'urne contient donc $k+1$ rouges et 1 blanche équiprobables au début du $k+1$-ème tirage.
$(S_n=n+1)$ *signifie que l'on a tiré que des boules blanches. Dans cette partie, les blanches et les rouges ont des rôles complètement symétriques (même nombre au départ et même comportement à chaque tirage), donc, par symétrie (ou en inversant le rôle des blanches et des rouges), on a bien* $P(S_{n+1}=n)=\frac{1}{n+1}$.

9. Soit $(k,\ell)\in[\![1,n+2]\!]\times[\![1,n+1]\!]$.

(i) Si $\ell \notin \{k-1, k\}$, alors, comme $(S_{n+1} - S_n)(\Omega) = X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$, l'événement $(S_{n+1} = k \cap S_n = \ell)$ est impossible (car il implique $S_{n+1} - S_n = k - \ell \notin \{0, 1\}$), donc

$$P(S_{n+1} = k | S_n = \ell) = \frac{P(S_{n+1} = k \cap S_n = \ell)}{P(S_n = \ell)} = \frac{0}{P(S_n = \ell)} = 0.$$

(ii) Si $\ell = k - 1$ (et donc $k \geq 2$), alors

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k | S_n = \ell) &= \frac{P(S_{n+1} = k \cap S_n = k-1)}{P(S_n = k-1)} = \frac{P(S_{n+1} - S_n = 1 \cap S_n = k-1)}{P(S_n = k-1)} \\
&= \frac{P(X_{n+1} = 1 \cap S_n = k-1)}{P(S_n = k-1)} \\
&= \frac{P(S_n = k-1) P_{S_n = k-1}(X_{n+1} = 1)}{P(S_n = k-1)} \quad \text{(formule des proba. composées)} \\
&= P_{S_n = k-1}(X_{n+1} = 1) = \frac{k-1}{1+1+n} = \frac{k-1}{2+n} \quad \text{(d'après Q4 avec } k-1 \in \mathbb{N}^* \text{ et } r = b = 1)
\end{aligned}$$

(iii) Enfin, si $\ell = k$, on a de même

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k | S_n = \ell) &= \frac{P(S_{n+1} = k \cap S_n = k)}{P(S_n = k)} = \frac{P(S_{n+1} - S_n = 0 \cap S_n = k)}{P(S_n = k)} \\
&= \frac{P(X_{n+1} = 0 \cap S_n = k)}{P(S_n = k)} \\
&= \frac{P(S_n = k) P_{S_n = k}(X_{n+1} = 0)}{P(S_n = k)} \quad \text{(formule des proba. composées)} \\
&= P_{S_n = k}(X_{n+1} = 0) = 1 - P_{S_n = k}(X_{n+1} = 1) \\
&= 1 - \frac{k}{1+1+n} = \frac{2+n-k}{2+n} \quad \text{(d'après la question 4 avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } r = b = 1)
\end{aligned}$$

10. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(S_n = \ell)_{\ell \in S_n(\Omega)} = (S_n = \ell)_{\ell \in [\![1, n+1]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k) &= \sum_{\ell=1}^{n+1} P(S_{n+1} = k \cap S_n = \ell) = \sum_{\ell=1}^{n+1} P(S_n = \ell) P_{S_n = \ell}(S_{n+1} = k) \\
&= P(S_n = k-1) P_{S_n = k-1}(S_{n+1} = k) + P(S_n = k) P_{S_n = k}(S_{n+1} = k) \\
&\quad + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \notin \{k-1, k\}}}^{n+1} P(S_n = \ell) \underbrace{P_{S_n = \ell}(S_{n+1} = k)}_{=0} \\
&\quad \text{(car, comme } k \in [\![2, n+1]\!],\ k-1 \text{ et } k \in [\![1, n+1]\!]) \\
&= \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).
\end{aligned}$$

11. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, "S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$" (HR_n).
Initialisation : Pour $n = 0$, $S_0 = 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 1]\!])$, donc on a bien HR_0.
Pour $n = 1$, on a $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2) = \mathcal{U}([\![0, 1]\!])$ d'après la question 1 avec $r = b = 1$. On a donc $S_1 = 1 + X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!])$. On a bien HR_1.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_n vérifiée.
Alors on a $S_{n+1}(\Omega) = [\![1, n+2]\!]$ (d'après la question 3), $P(S_{n+1} = 1) = \frac{1}{n+2}$ (d'après la question 8), $P(S_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}$ (admis dans l'énoncé) et, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
P(S_{n+1} = k) &= \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k) \\
&= \frac{k-1}{n+2} \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \frac{1}{n+1} \quad \text{(d'après } HR_n \text{ avec } k-1 \text{ et } k \in S_n(\Omega) = [\![1, n+1]\!]) \\
&= \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+2}.
\end{aligned}$$

On a donc bien $S_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n+2]\!])$, i.e. HR_{n+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])$.

Exercice 2 : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Corrigé de B. Winckler

Partie I – Un développement en série entière

1. C'est un développement en série entière usuel. On a, pour rappel :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)}{n!} x^n.$$

2. Soit $x \in]-1,1[$. Posons $\alpha = -\frac{1}{2}$ dans l'identité de la question précédente. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $-x \in]-1,1[$, et on peut donc évaluer en $-x$ l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right)}{n!} (-x)^n .$$

Simplifions le terme général. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} \cdot (2k+1)\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1).$$

La méthode pour écrire sous forme compacte un produit d'entiers impairs est standard : on multiplie et divise par le produit de tous les entiers pairs, afin de faire apparaître le produit de tous les entiers jusqu'à un certain rang (et donc une factorielle), et on factorise chaque entier pair par 2. On obtient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n \prod_{k=1}^{n} k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2} - k\right) = \frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!}.$$

Comme, de plus, pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a : $(-x)^n = (-1)^n x^n$, on en déduit le développement en série entière plus compact :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n,$$

d'où le résultat, étant donné que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Partie II – Probabilité de retour à l'origine

3. Soit $t \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On montre facilement que $X_t = -1$ si et seulement si $\dfrac{X_t+1}{2} = 0$, et $X_t = 1$ si et seulement si $\dfrac{X_t+1}{2} = 1$. Comme X_t ne prend que les valeurs -1 et 1, cela donne l'ensemble des valeurs possibles prises par $\dfrac{X_t+1}{2}$. Autrement dit : $\left(\dfrac{X_t+1}{2}\right)(\Omega) = \{0,1\}$, ce qui assure déjà que $\dfrac{X_t+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli. Pour connaître son paramètre, on calcule la probabilité que $\dfrac{X_t+1}{2} = 1$:
$$\mathrm{P}\left(\frac{X_t+1}{2} = 1\right) = \mathrm{P}(X_t = 1) = p.$$
Donc : $\dfrac{X_t+1}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p.
Ainsi $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}$ est une somme de n variables de Bernoulli de même paramètre p, indépendantes grâce au lemme des coalitions (puisque les X_t le sont par hypothèse), donc on sait que $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.
4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On remarque que l'on a :
$$\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{t=1}^{n} X_t + \sum_{t=1}^{n} 1\right) = \frac{S_n+n}{2}.$$
On en déduit :
$$S_n = 0 \Longleftrightarrow \sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} = \frac{n}{2}.$$
Or : $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} \sim \mathcal{B}\left(n,p\right)$, donc en particulier : $\left(\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}\right)(\Omega) = [\![0,n]\!]$. On retient surtout que c'est une variable aléatoire à valeurs entières, donc si n est impair, on a $\dfrac{n}{2} \notin \left(\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}\right)(\Omega)$, donc : $\mathrm{P}\left(\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} = \frac{n}{2}\right) = 0$. Par l'équivalence ci-dessus, on a donc aussi, si n est impair : $\mathrm{P}(S_n = 0) = 0$.
En revanche, si n est pair, alors $\dfrac{n}{2} \in [\![0,n]\!]$ et on a, pour une loi binomiale de paramètres n et p :
$$\mathrm{P}\left(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2} = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{n/2} p^{n/2}(1-p)^{n-n/2} = \binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2}.$$
Ainsi, si n est pair : $\mathrm{P}(S_n = 0) = \binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2}$. Comme $u_n = \mathrm{P}(S_n = 0)$, on a bien montré :
$$u_n = \begin{cases} \binom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Remarque. On pouvait justifier autrement que $u_n = 0$ pour n impair : pour que $(S_n = 0)$ se réalise, du fait que $S_n = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_t$ soit une somme de 1 et -1, il faut qu'il y ait eu autant de 1 que de -1 dans cette somme, ce qui n'est possible que si la somme a un nombre pair de termes. Comme cette somme a n termes, il faut donc que n soit pair pour que $(S_n = 0)$ se réalise. Par contraposée, si n est impair alors $(S_n = 0)$ est l'évènement impossible.

5. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors $2n$ est un entier pair, donc on a :

$$u_{2n} = \binom{2n}{n}(p(1-p))^n.$$

Or, d'après la formule de Stirling :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

On en déduit :

$$u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Or l'application $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum sur $[0,1]$ en $x = \frac{1}{2}$, et ce maximum vaut $\frac{1}{4}$. Donc, pour tout n au voisinage de $+\infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Les deux extrémités de cet encadrement convergent vers 0. Par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} = 0$. Deux suites équivalentes ayant même limite, on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(S_{2n} = 0) = \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0.$$

Ainsi, après un temps arbitrairement long, il est presque certain que le mobile ne se trouve pas en l'origine (n'oublions pas que $u_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc les deux suites extraites des indices pairs et des indices impairs ont la même limite, et : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$).

Partie III – Nombre de passages par l'origine

6. La variable aléatoire T_n compte le nombre de passages du mobile à l'origine entre le début de l'observation et l'instant $2n$.
7. Comme : $O_{2j}(\Omega) = \{0, 1\}$, la variable aléatoire O_{2j} suit une loi de Bernoulli. On détermine son paramètre en calculant la probabilité qu'elle soit égale à 1. Or :

$$O_{2j} = 1 \iff S_{2j} = 0,$$

donc : $\mathrm{P}(O_{2j} = 1) = \mathrm{P}(S_{2j} = 0) = u_{2j} = \binom{2j}{j}(p(1-p))^j$. En résumé :

$$O_{2j} \sim \mathcal{B}\left(\binom{2j}{j}(p(1-p))^j\right).$$

Donc : $\mathrm{E}(O_{2j}) = \binom{2j}{j}(p(1-p))^j$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{E}(O_{2j}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(p(1-p))^j.$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\mathrm{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}(p(1-p))^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{(j!)^2}(p(1-p))^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^j.$$

Comme $p \neq \frac{1}{2}$, l'étude des variations de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$ montre qu'on a : $0 \leqslant 4p(1-p) < 1$. Ainsi $4p(1-p)$ appartient à l'intervalle ouvert de convergence du développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$. On en déduit que la série $\sum\limits_{j\geqslant 0} \dfrac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^j$ converge, et que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^n = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2}(4p(1-p))^j = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}.$$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(T_n) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$. Le membre de droite de cette égalité est croissant (comme fonction de p) sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et décroissant sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ (en vérité, le fait que cette quantité reste inchangée en composant par $p \mapsto 1-p$ assure que le graphe de cette fonction est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$, donc l'étude sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ suffit). Quand $p \to 0^+$, cette quantité vaut 1 et quand $p \to \frac{1}{2}^-$, elle tend vers l'infini.

On en déduit qu'après un temps infini, le mobile passe un nombre fini de fois en moyenne par l'origine : en moyenne une fois environ si p est proche de 0 ou de 1 (ce qui correspondrait logiquement au fait que la position initiale soit l'origine).

9. Notons que si $p = \frac{1}{2}$, alors on a d'après la question 7 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j}.$$

Conformément à l'indication de l'énoncé, on va montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

par récurrence sur n. Si $n = 0$, alors : $\mathrm{E}(T_0) = \sum_{j=0}^{0} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j} = \frac{1}{2^{2\cdot 0}}\binom{2\cdot 0}{0} = \frac{2\cdot 0+1}{2^{2\cdot 0}}\binom{2\cdot 0}{0}$.

D'où le résultat au rang $n = 0$.

À présent, montrons l'hérédité de cette formule. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose : $\mathrm{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

Alors :

$$\mathrm{E}(T_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j} + \frac{1}{2^{2(n+1)}}\binom{2(n+1)}{n+1} = \mathrm{E}(T_n) + \frac{1}{2^{2(n+1)}}\binom{2(n+1)}{n+1}.$$

Et donc, par hypothèse de récurrence :

$$\mathrm{E}(T_{n+1}) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2(n+1)}}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{1}{2^{2(n+1)}}\left(2^2(2n+1)\binom{2n}{n} + \binom{2n+2}{n+1}\right).$$

Or (l'objectif des calculs qui suivent est de faire apparaître $\binom{2n+2}{n+1}$, conformément à ce qu'on a envie de démontrer) :

$$\begin{aligned}
\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(n!)^2} = \frac{(2n+2)!}{2(n+1)(2n+1)(n!)^2} &= \frac{1}{2(2n+1)}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!n!} \\
&= \frac{n+1}{2(2n+1)}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{n+1}{2(2n+1)}\binom{2n+2}{n+1},
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(T_{n+1}) = \frac{1}{2^{2(n+1)}}\left(2(n+1)\binom{2n+2}{n+1} + \binom{2n+2}{n+1}\right) &= \frac{2(n+1)+1}{2^{2(n+1)}}\binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{2(n+1)+1}{2^{2(n+1)}}\binom{2(n+1)}{n+1},
\end{aligned}$$

d'où l'hérédité : le résultat au rang n implique le résultat au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$. En reprenant le calcul d'équivalent de la question 5, on en déduit :

$$\mathrm{E}(T_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n+1}{2^{2n}} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\sqrt{\pi n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

On en déduit : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(T_n) = +\infty$. Ainsi, en moyenne, la particule passe une infinité de fois par l'origine quand on observe l'expérience pendant un temps arbitrairement long.

Remarque. Nul besoin de passer par un raisonnement par récurrence, si l'on remarque que $\mathrm{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}}$ est le coefficient général du produit de Cauchy de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n$ par $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ (cela tombe bien, on sait expliciter ces deux séries ; pour la première, cela découle de la question 2). Pour tout x au voisinage de 0, on a donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{E}(T_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-3/2}.$$

Or on sait développer en série entière $x \mapsto (1-x)^{-3/2}$, par exemple en imitant le raisonnement de la question 2 où l'on pose cette fois $\alpha = -\frac{3}{2}$. Mais on va l'obtenir encore plus facilement en exploitant les calculs déjà effectués, puisque $x \mapsto (1-x)^{-3/2}$ n'est rien d'autre que la dérivée de $x \mapsto 2(1-x)^{-1/2}$ dont on connaît déjà le développement en série entière. En le dérivant terme à terme, on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x)^{-\frac{3}{2}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}(n+1)x^n,$$

d'où, pour tout x au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{E}(T_n)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}(n+1)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2^{2n+2}(n+1)n!n!}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^2\frac{(n+1)(2n+1)(2n)!}{2^{2n+2}(n+1)!n!}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n,
\end{aligned}$$

donc par unicité des coefficients : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

Cette approche n'est bien entendu pas plus élémentaire que celle proposée par l'énoncé, mais elle est relativement rapide et a l'avantage de donner la valeur de $\mathrm{E}(T_n)$ recherchée sans avoir la moindre idée de sa valeur a priori (ce qui était le cas de votre serviteur).

Exercice 3 : Succession de tirages dans une urne

Corrigé de P. Soleillant

Partie I – Probabilité de l'événement E

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k = \bigcap_{k=1}^{n} B_k \cap B_{n+1} \subset \bigcap_{k=1}^{n} B_k$, donc, par croissance de P :

$$p_{n+1} = P\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\right) \leqslant P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = p_n$$

La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante. Puisqu'elle est, en outre, minorée (par 0), d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente.

De plus, par le théorème de continuité monotone, $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n\right)$, autrement dit :

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(E)$$

2. Si l'événement $\bigcap_{i=1}^{k} B_i$ est réalisé, l'urne considérée contient $1 + \sum_{i=1}^{k} u_i = S_k$ boules blanches et une boule rouge, donc, au total, $S_k + 1$ boules.

Par conséquent, $P\left(B_{k+1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) = \dfrac{S_k}{S_k+1}$.

3. Par la formule des probabilités composées, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} p_n = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) &= P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times \cdots \times P\left(B_n \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{n-1} B_k\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{S_2}{S_2+1} \times \cdots \times \frac{S_{n-1}}{S_{n-1}+1} \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k+1} \end{aligned}$$

Partie II – Caractérisation de la propriété $P(E) = 0$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est la somme partielle de la série (à termes positifs) de terme général u_n (à laquelle on ajoute 1). Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathbb{N}^*$, en particulier, $u_n \geqslant 1$, et donc (u_n) ne converge pas vers 0. La série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente, et, comme elle est à termes positifs, on en déduit que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

5. La série $\sum \ln\left(\dfrac{S_k}{S_k+1}\right)$ est à termes négatifs, et est de même nature que $\sum \ln\left(\dfrac{S_k+1}{S_k}\right)$, qui est à termes positifs.

De plus, $\ln\left(\dfrac{S_k+1}{S_k}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{S_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{S_k}$, puisque $S_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On déduit de cet équivalent, par comparaison de séries à termes positifs, que $\sum \ln\left(\dfrac{S_k+1}{S_k}\right)$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{S_k}$, et donc $\sum \ln\left(\dfrac{S_k}{S_k+1}\right)$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{S_k}$.

6. Puisqu'on a vu, en première partie, que $P(E) = \lim\limits_{n\to+\infty} p_n$, $P(E) = 0$ si et seulement si $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(p_n) étant une suite de nombres strictement positifs, on montre facilement (composition avec ln/exp) que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $\ln(p_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(p_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{S_k}{S_k+1}\right)$, et la divergence de la suite $(\ln(p_n))$ vers $-\infty$ est donc équivalente à la divergence de la série $\sum \ln\left(\frac{S_k}{S_k+1}\right)$ (cette série étant à termes négatifs, sa seule façon de diverger est une divergence vers $-\infty$).

A l'aide de **Q5.**, on en déduit que $P(E) = 0$ si et seulement si $\sum \frac{1}{S_n}$ diverge.

7. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1$, il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = n + 1$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{S_n} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{S_n}$ est divergente.

   Par conséquent, d'après **Q6.**, $P(E) = 0$.

8. Si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$, et donc $\frac{1}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$: la série $\sum \frac{1}{S_n}$ est donc convergente, ce qui implique, d'après **Q6.**, que $P(E) \neq 0$.