

DS13 (4^h)
Samedi 14/03/26

MPI (sujet B)

EXERCICE 1 Les urnes de Pólya

Calculatrices interdites
3 exercices indépendants

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n -ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n -ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n -ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n -ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^n X_k.$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $P(E | F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E | F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Préliminaires

- Q1. Déterminer la loi de X_1 .
- Q2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'évènement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2 .
- Q3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

- Q4. Pour tout $k \in \llbracket b, n + b \rrbracket$, calculer $P(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.
- Q5. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{E(S_n)}{b + r + n}.$$

- Q6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q7. Exprimer l'évènement $(S_n = 1)$ avec les évènements $(X_k = 0)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Q8. Montrer que $P(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$.

Q9. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket \times \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Calculer la probabilité $P(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i) \ell \notin \{k-1, k\}, \quad (ii) \ell = k-1, \quad (iii) \ell = k.$$

Q10. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, on a la relation :

$$P(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} P(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2} P(S_n = k).$$

Q11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

EXERCICE 2

Marche aléatoire sur \mathbb{Z}

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial $t = 0$ est $k = 0$. À chaque instant $t \in \mathbb{N}^*$, elle se déplace aléatoirement de sa position $k \in \mathbb{Z}$ à la position $k + 1$ ou $k - 1$.

Soit $p \in]0;1[$. On définit sur un espace probabilisé (Ω, Σ, P) une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_t = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_t = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{t=1}^n X_t$.

Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_t modélise le déplacement de la particule à l'instant t . Si $X_t = 1$, la particule se déplace vers la droite. Si $X_t = -1$, la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n modélise la position de la particule après n déplacements.

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Partie I - Un développement en série entière

Q.1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin \mathbb{N}$. Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle $x \mapsto (1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence.

Q.2) En déduire que pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n.$$

Partie II - Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = P(S_n = 0).$$

Q.3) Pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{X_t + 1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire $\sum_{t=1}^n \frac{X_t + 1}{2}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Q 4). En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} (p(1-p))^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 5). Déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$ selon les valeurs de p et interpréter le résultat.

Partie III - Nombre de passages par l'origine

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note O_{2j} la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j$, 0 sinon. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum_{j=0}^n O_{2j}$. On note $\mathbb{E}(T_n)$ l'espérance de la variable aléatoire T_n .

Dans cette partie, on souhaite déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Q 6). Soit $n \in \mathbb{N}$. Que modélise la variable aléatoire T_n ?

Q 7). Soit $j \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire O_{2j} . En déduire que :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^n \binom{2j}{j} (p(1-p))^j.$$

Q 8). On suppose dans cette question que $p \neq \frac{1}{2}$. En utilisant le résultat de la Q10, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$ et interpréter le résultat.

Q 9). On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

EXERCICE 3

Succession de tirages dans une urne

Présentation générale

On fixe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels non nuls. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et on considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

1. si la boule tirée est de couleur blanche lors du k -ème tirage, on la replace dans l'urne et on ajoute u_k boules blanches supplémentaires ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge lors du k -ème tirage, on la replace dans l'urne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par B_n l'évènement « la boule tirée lors du n -ième tirage est blanche » et on note :

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n.$$

L'objectif principal de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour que la probabilité de l'évènement E soit nulle.

On considère également la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = 1 + \sum_{k=1}^n u_k.$$

On rappelle que si A et C sont deux évènements avec $P(C) > 0$, on note $P(A | C)$ ou $P_C(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant C .

Partie I - Probabilité de l'évènement E

Dans cette partie, on considère la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $p_n = P\left(\bigcap_{k=1}^n B_k\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q1) Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire que cette suite est convergente, puis justifier que $P(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Q2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si l'évènement $\bigcap_{i=1}^k B_i$ est réalisé, décrire la composition de l'urne en fonction de S_k juste avant d'effectuer le $(k+1)$ -ième tirage. En déduire la probabilité $P\left(B_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^k B_i\right)$.

Q3) Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_{k+1}}.$$

Partie II - Caractérisation de la propriété $P(E) = 0$

- Q.4). Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
- Q.5). Montrer que les séries $\sum \ln\left(\frac{S_k}{S_k + 1}\right)$ et $\sum \frac{1}{S_k}$ sont de même nature.
- Q.6). Montrer que $P(E) = 0$ si et seulement si la série $\sum \frac{1}{S_k}$ est divergente.
- Q.7). Dans cette question, on suppose que $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(E)$.
- Q.8). Proposer une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $P(E) \neq 0$ en justifiant votre réponse.

FIN