

# DS10 du 31/01/2026 (4h)

## Corrigé du sujet B (MPI)

### Exercice 1 : Sur les matrices antisymétriques réelles

Corrigé de C. Devulder

#### Partie I - Un exemple en dimension 2

1. On a

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + t^2$$

Les valeurs propres étant les racines de  $\chi_A$ ,

$$\text{Sp}(A) = \{it, -it\}$$

2. On vérifie par calcul que

$$(I_2 - A)^{-1} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$R = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de  $R$  sont clairement orthogonales. Leur norme vaut 1 (car  $(1-t^2)^2 + 4t^2 = (1+t^2)^2$ ) et donc  $R$  est orthogonale. Son déterminant étant égal à 1, on en déduit que

$$R \in SO_2(\mathbb{R})$$

où  $SO_n(\mathbb{R})$  est le groupe spécial orthogonal d'ordre  $n$ .

3. Un calcul permet de vérifier que

$$(I_2 + R_\theta)^{-1} = \frac{1}{2(1+\cos(\theta))} \begin{pmatrix} 1+\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1+\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Le calcul métriciel donne alors

$$M = \frac{1}{1+\cos(\theta)} \begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

#### Partie II - Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

4. On suppose  $BC = CB$ . En multipliant à gauche et droite par  $C^{-1}$ , on obtient immédiatement

$$C^{-1}B = BC^{-1}$$

5. On a

$${}^t(AX)\overline{X} = {}^t(\lambda X)\overline{X} = \lambda \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

et par ailleurs, en utilisant le fait que  $A$  est réelle,

$${}^t(AX)\overline{X} = {}^t X^t A \overline{X} = -{}^t X A \overline{X} = -{}^t X (\overline{AX}) = -\overline{\lambda} {}^t X \overline{X} = -\overline{\lambda} \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

Comme  $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$  (car  $X$  est non nul) on a  $\lambda = -\overline{\lambda}$  ce qui prouve que  $\lambda$  est imaginaire pur. On a ainsi

$$\text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$$

6. En particulier,  $-1$  n'est pas valeur propre de  $A$  et  $I_n + A$  est donc inversible. Comme  $I_n - A$  et  $I_n + A$  commutent, la question 4 donne

$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$$

On a de plus (puisque  ${}^t(MN) = {}^tN{}^tN$  et  ${}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}$ )

$$R{}^tR = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n - A)^{-1}$$

Comme  $(I_n - A)$  et  $(I_n + A)$  commutent, on conclut que  $R{}^tR = I_n$  et donc

$$R \in O_n(\mathbb{R})$$

7. Le déterminant étant un morphisme multiplicatif,

$$\det(R) = \frac{\det(I_n - A)}{\det(I_n + A)} = \frac{\chi_A(1)}{(-1)^n \chi_A(-1)}$$

On note  $k$  la multiplicité de 0 comme valeur propre de  $A$  (éventuellement nulle). On a donc l'existence d'un polynôme  $Q$  tel que  $\chi_A = X^k Q$  et  $Q$  est sans racine réelle. On a alors  $Q(1)$  et  $Q(-1)$  de même signe et  $\det(R)$  est du signe de  $(-1)^{n-k}$ . Or,  $n - k$  est le degré de  $Q$  et est donc pair (car  $Q$  est un polynôme réel sans racine réelle).  $\det(R)$  est donc positif.

Comme  $R$  est une matrice orthogonale,

$$\det(R) = 1$$

8. On a

$${}^tA = {}^t(I_n - R){}^t(I_n + R)^{-1} = (I_n - {}^tR)(I_n + {}^tR)^{-1} = (I_n - R^{-1})(I_n + R^{-1})^{-1}$$

Un calcul simple montre que

$$(I_n + R)(I_n - R^{-1}) = I_n + R - R^{-1} - I_n = (R - I_n)(I_n + R^{-1})$$

en multipliant par l'inverse de  $(I_n + R^{-1})$  à droite et l'inverse de  $(I_n + R)$  à gauche, on en déduit que

$${}^tA = (I_n + R)^{-1}(R - I_n) = -A$$

ce qui montre que  $A$  est antisymétrique.

9. Dans une base orthonormée directe de premier vecteur orientant et dirigeant l'axe, on connaît la matrice de la rotation  $r$ . En notant  $P$  la matrice de passage de la base canonique à cette base adaptée, on a  $P \in O_3(\mathbb{R})$  (changement de b.o.n.) et

$$P^{-1}RP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$$

Posons  $t = \tan(\theta/2)$  (qui existe puisque  $\theta \neq 0[\pi]$ ) et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$  où  $C = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ . Un calcul par blocs montre que  $I_3 - B$  est inversible et que

$$(I_3 + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (I_2 + C)^{-1} \end{pmatrix}$$

puis que

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (I_2 + C)^{-1}(I_2 - C) \end{pmatrix}$$

Avec la première partie, on obtient (il faut changer  $B$  en  $-B$  et donc  $t$  en  $-t$  et  $(I_3 + B)^{-1}$  et  $(I_3 - B)$  commutent)

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-t^2}{1+t^2} & -\frac{2t}{1+t^2} \\ 0 & \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

Or,  $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos(\theta) = \cos(\theta)$  et  $\frac{2t}{1+t^2} = \sin(\theta)$  et donc

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = P^{-1}RP$$

On en déduit que

$$R = P(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B)P^{-1} = (I_3 + A)^{-1}(I_3 - A) \text{ avec } A = PBP^{-1}$$

On conclut en remarquant que puisque  $B$  est antisymétrique et  $P$  orthogonale,  $A$  est antisymétrique.

\* \* \*

## Exercice 2 : Théorème de Borel

### Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

1. Il s'agit de justifier, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . L'application  $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ , en tant que composition de l'application polynomiale  $t \mapsto -t(1-itx)$ , continue sur  $\mathbb{R}_+$  et à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , et de l'application exponentielle, continue sur  $\mathbb{C}$  en tant que somme de série entière de rayon de convergence infini. Elle est donc intégrable sur tout segment inclus dans  $\mathbb{R}_+$ , et le problème d'intégrabilité ne se pose qu'au voisinage de  $+\infty$ .

Pour tout nombre réel  $t$  on a :  $|t^2 e^{-t(1-itx)}| = t^2 e^{-t}$  et donc, par croissances comparées :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 |e^{-t(1-itx)}| = 0.$$

On en déduit :  $|e^{-t(1-itx)}| = o_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ . Or la fonction de Riemann  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$ , puisque son exposant 2 est strictement supérieur à 1, donc par comparaison on en déduit que l'application  $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$ .

Ainsi l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)} dt$  converge absolument, donc converge, et on en déduit que  $f(x)$  existe pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$ .

2. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . L'application  $t \mapsto t^p e^{-t}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ , donc intégrable sur tout segment inclus dans  $[0, +\infty[$  : le seul problème éventuel d'intégrabilité est au voisinage de  $+\infty$ . La fonction étant positive, on peut procéder par relation de comparaison. Or on a, d'après le théorème des croissances comparées :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \cdot t^p e^{-t} = 0$ . On en déduit :

$$t^p e^{-t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^2} \right).$$

La fonction de Riemann  $t \mapsto \frac{1}{t^2}$  est intégrable au voisinage de  $+\infty$  parce que son exposant 2 est strictement supérieur à 1, donc l'application  $t \mapsto t^p e^{-t}$  est également intégrable au voisinage de  $+\infty$  d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.

On en déduit que l'application  $t \mapsto t^p e^{-t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , donc  $\Gamma_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$  est une intégrale convergente.

Donnons à présent une relation entre  $\Gamma_{p+1}$  et  $\Gamma_p$  : passer de  $t^{p+1}$  à  $t^p$  dans l'intégrande se fait en intégrant par parties. Soit, donc,  $a$  un réel positif ; l'application  $t \mapsto e^{-t}$  est continue sur  $[0, a]$  et l'application  $t \mapsto t^{p+1}$  est de classe  $C^1$  sur ce même segment. On intègre la première et on dérive la seconde ; d'après la formule de l'intégration par parties, on a donc :

$$\int_0^a t^{p+1} e^{-t} dt = [-t^{p+1} e^{-t}]_0^a - \int_0^a (-e^{-t})(p+1)t^p dt = -a^{p+1} e^{-a} + (p+1) \int_0^a e^{-t} t^p dt.$$

Or :  $\lim_{a \rightarrow +\infty} a^{p+1}e^{-a} = 0$  d'après le théorème des croissances comparées. On en déduit, quand  $a \rightarrow +\infty$  dans l'égalité ci-dessus :

$$\int_0^{+\infty} t^{p+1}e^{-t}dt = (p+1) \int_0^{+\infty} t^p e^{-t}dt,$$

c'est-à-dire :

$$\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p.$$

3. On a immédiatement :  $\Gamma_0 = \int_0^{+\infty} e^{-u}du = [-e^{-u}]_0^{+\infty} = 1$ . Voyons comment, par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}$ , on en déduit l'égalité :  $\Gamma_p = p!$ . Si  $p = 0$ , cela vient d'être établi, vu que  $0! = 1$  et  $\Gamma_0 = 1$ .

Soit  $p \in \mathbb{N}$ , et supposons que  $\Gamma_p = p!$ . Alors, d'après l'égalité démontrée ci-dessus :

$$\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p = (p+1)p! = (p+1)!,$$

donc l'égalité voulue est héréditaire. Nous l'avons initialisée, donc par principe de récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \Gamma_p = p!.$$

4. Nous allons montrer que  $f$  est de classe  $C^p$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , à l'aide du théorème de régularité  $C^p$  des intégrales à paramètre. Posons :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad g(x, t) = e^{-t(1-itx)} = e^{-t}e^{it^2x}.$$

Alors :

— pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , l'application  $x \mapsto g(x, t)$  est de classe  $C^p$  sur  $\mathbb{R}$ , puisqu'elle s'obtient en composant une application polynomiale et l'exponentielle complexe, et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d^p g}{dx^p}(x, t) = (it^2)^p e^{-t}e^{it^2x};$$

— pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'application  $t \mapsto \frac{d^p g}{dx^p}(x, t)$  est continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$  par un argument analogue à celui ci-dessus ;

— pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , on a :

$$\left| \frac{d^p g}{dx^p}(x, t) \right| = t^{2p}e^{-t};$$

et l'application  $t \mapsto t^{2p}e^{-t}dt$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  d'après la question **Q2**, ce qui démontre à la fois, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'intégrabilité de  $t \mapsto \frac{d^p g}{dx^p}(x, t)$  sur  $\mathbb{R}_+$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , et l'hypothèse de domination.

On en déduit, d'après le théorème de régularité  $C^p$  des intégrales à paramètre, que  $f$  est de classe  $C^p$  sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{d^p g}{dx^p}(x, t)dt = i^p \int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t(1-itx)}dt.$$

5. D'après la question précédente, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \frac{f^{(p)}(0)}{p!} = \frac{i^p}{p!} \int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t}dt = \frac{i^p}{p!} \Gamma_{2p} = i^p \frac{(2p)!}{p!}.$$

Ce terme n'est jamais nul et on a, pour tout  $x$  non nul et  $p$  au voisinage de l'infini :

$$\frac{\left| \frac{f^{(p+1)}(0)}{(p+1)!} x^{p+1} \right|}{\left| \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p \right|} = \frac{(2(p+1))!}{(p+1)!} \times \frac{p!}{(2p)!} |x| = \frac{(2p+2)(2p+1)}{p+1} |x| \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} 4p|x| \underset{p \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  non nul la série  $\sum_{p \geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$  diverge grossièrement d'après la règle de

D'Alembert. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{p \geq 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p$  est nul.

Si  $f$  est développable en série entière en 0, alors  $f$  est égale à sa série de Taylor dans un voisinage de 0 ; or sa série de Taylor diverge en tout réel non nul d'après ce qui précède, donc c'est impossible. On en déduit que  $f$  n'est pas développable en série entière en 0.

6. Nous allons vérifier que  $g$  est de classe  $C^p$  sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$  grâce au théorème de dérivation terme à terme, démontrant au passage l'existence de la somme qui définit  $g$ . Posons :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{-k(1-ikx)}.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'application  $g_k$  est manifestement de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  : à multiplication près par la constante  $e^{-k}$ , elle s'obtient en composant l'application polynomiale  $x \mapsto k^2x$ , de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , avec l'exponentielle complexe  $x \mapsto e^{ix}$ , de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  parce que sa partie réelle (le cosinus) et sa partie imaginaire (le sinus) le sont. On a de plus :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k^{(p)}(x) = (ik^2)^p e^{-k} e^{ik^2x},$$

avec la convention ici que pour  $p = k = 0$ , on a :  $k^{2p} = 1$ .

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , étudions le mode de convergence de la série de fonctions  $\sum_{k \geq 0} g_k$  : pour tout

$p \in \mathbb{N}$ , tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $|g_k^{(p)}(x)| = k^{2p} e^{-k}$ . On en déduit :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|g_k^{(p)}\|_\infty = k^{2p} e^{-k}.$$

Montrons que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{k \geq 0} \|g_k^{(p)}\|_\infty = \sum_{k \geq 0} k^{2p} e^{-k}$  converge : elle est à termes

positifs, et on montre comme aux questions **Q1** et **Q2** que  $k^{2p} e^{-k} = \underset{k \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{k^2} \right)$ , grâce au

théorème des croissances comparées. Or la série de Riemann  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$  converge parce que son

exposant 2 est strictement supérieur à 1. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série  $\sum_{k \geq 0} k^{2p} e^{-k}$  converge pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

Ainsi, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  la série  $\sum_{k \geq 0} g_k^{(p)}$  converge normalement, donc uniformément (et simple-

ment) sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de dérivation terme à terme, on en déduit que  $g = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k$  est de classe  $C^p$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , donc de classe  $C^\infty$ , et on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^{(p)}(x) = i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} e^{ik^2x}.$$

7. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . D'après la question précédente :

$$\left| g^{(p)}(0) \right| = \left| i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \right| = |i|^p \left| \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \right|.$$

Or  $|i| = 1$ , et la somme est positive, donc :

$$\left| g^{(p)}(0) \right| = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} = p^{2p} e^{-p} + \underbrace{\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{+\infty} k^{2p} e^{-k}}_{\geq 0} \geq p^{2p} e^{-p},$$

d'où le résultat.

8. Montrons que la série entière  $\sum_{p \geq 0} \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} x^p$  est de rayon de convergence nul. Pour tout réel  $x$  non nul, et pour tout  $p$  au voisinage de  $+\infty$ , on a :

$$\frac{\left| \frac{(p+1)^{2(p+1)} e^{-(p+1)}}{(p+1)!} x^{p+1} \right|}{\left| \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} x^p \right|} = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{2p} (p+1) e^{-1|x|} \geq p e^{-1|x|} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  non nul :  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\left| \frac{(p+1)^{2(p+1)} e^{-(p+1)}}{(p+1)!} x^{p+1} \right|}{\left| \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} x^p \right|} = +\infty$ . D'après la règle de

D'Alembert, la série  $\sum_{p \geq 0} \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} x^p$  diverge donc grossièrement pour tout  $x$  non nul, donc la série entière  $\sum_{p \geq 0} \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!} x^p$  est de rayon de convergence nul.

Or :  $\forall p \in \mathbb{N}$ ,  $\left| \frac{g^{(p)}(0)}{p!} \right| \geq \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!}$ . Donc, d'après le théorème de comparaison des séries entières,

le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{p \geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$  est inférieur ou égal à 0, donc est nul.

Par le même argument que dans la question **Q5**, on en déduit que  $g$  n'est pas développable en série entière en 0.

## Partie II – Le théorème de Borel

9. On a :  $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$ . La décomposition en éléments simples assure l'existence de deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{C}$  différent de  $i$  et  $-i$  :

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

Pour les déterminer, notons que si l'on multiplie cette égalité par  $x - i$ , et qu'on pose  $x = i$ , on obtient :

$$\frac{1}{2i} = a,$$

et de même, en multipliant cette égalité par  $x + i$  et en posant  $x = -i$ , on obtient  $b = -\frac{1}{2i}$ . Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right).$$

10. Tout d'abord,  $\psi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , en tant qu'inverse d'une application polynomiale qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . On doit montrer par récurrence que pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

Pour cela, notons qu'il s'agit d'une évidence si  $p = 0$ , par définition de  $\psi$ . À présent, soit  $p \in \mathbb{N}$ , et supposons que cette égalité soit vraie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Alors, en la dérivant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi^{(p+1)}(x) = \left( \psi^{(p)} \right)'(x) = (-1)^p p! \times \left( -\frac{p+1}{(x-i)^{p+2}} \right) = (-1)^{p+1} (p+1)! \times \frac{1}{(x-i)^{p+1+1}},$$

d'où l'hérédité de cette l'égalité. Elle est donc vraie pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  par principe de récurrence.

11. Un raisonnement analogue à celui de la question précédente permet de montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la dérivée  $p$ -ième de  $x \mapsto \frac{1}{x+i}$  est  $x \mapsto \frac{(-1)^p p!}{(x+i)^{p+1}}$ . Or, d'après la question **Q9**, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right),$$

donc, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{2i} \left( \frac{1}{(x-i)^{p+1}} - \frac{1}{(x+i)^{p+1}} \right) = \frac{(-1)^p p!}{2i} \times \frac{(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}}.$$

12. Soient  $p \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| = |2i \operatorname{Im}((x+i)^{p+1})| \leq 2|(x+i)^{p+1}| = 2|x+i|^{p+1} = 2(\sqrt{x^2+1})^{p+1},$$

d'où le résultat demandé en écrivant :  $(\sqrt{x^2+1})^{p+1} = (x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}$ .

En utilisant l'expression de  $\varphi^{(p)}(x)$  trouvée dans la question précédente, on en déduit :

$$\left| \varphi_1^{(p)}(x) \right| = \frac{p!}{2} \times \frac{|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}|}{(x^2+1)^{p+1}} = p! \times \frac{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}}{(x^2+1)^{p+1}} = \frac{p!}{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}},$$

et si  $x$  est non nul on peut même écrire :

$$\frac{p!}{(x^2+1)^{\frac{p+1}{2}}} \leq \frac{p!}{(x^2)^{\frac{p+1}{2}}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Finalement :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left| \varphi_1^{(p)}(x) \right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

13. Notons d'abord que si  $\alpha = 0$ , alors l'inégalité demandée est une évidence. Nous mettons donc ce cas de côté plus bas.

Pour tout réel  $\alpha$  et tout réel  $x$ , on a :  $\varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$ . Ainsi  $\varphi_\alpha$  n'est rien d'autre que la composition de la fonction  $x \mapsto \alpha x$  et de  $\varphi_1$ , ce qui permet d'écrire par une récurrence facile :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \left| \varphi_\alpha^{(p)}(x) \right| = \left| \alpha^p \varphi_1^{(p)}(\alpha x) \right|, \quad (1)$$

et donc, d'après la question précédente (où l'on remplace  $x$  par  $\alpha x$ ), pour tous réels  $\alpha$  et  $x$  non nuls on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad |\alpha| \left| \varphi_\alpha^{(p)}(x) \right| \leq |\alpha|^{p+1} \times \frac{p!}{|\alpha x|^{p+1}} = \frac{p!}{|x|^{p+1}},$$

d'où le résultat.

14. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $u_n(x) = a_n x^n \varphi_{\alpha_n}(x)$ . Or  $f_n : x \mapsto a_n x^n$  et  $\varphi_{\alpha_n}$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . D'après la formule de dérivation de Leibniz, l'application  $u_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et on a :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n^{(p)}(x) &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} f_n^{(k)}(x) \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) \\ &= a_n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x), \end{aligned} \quad (2)$$

d'où le résultat.

15. Soient  $n \geq 0$  un entier et  $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Alors  $x \mapsto x^{n-k}$  s'annule en 0 pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$  (sous cette hypothèse, on a :  $n-k \geq n-p \geq 1$ ). Donc, d'après la question précédente, on a :  $u_n^{(p)}(0) = 0$ .

À présent, si l'on prend  $p = n$  dans (2), on constate que le terme de la somme correspondant à  $k = p = n$  est  $n! \varphi_{\alpha_n}(x)$  : il est égal à  $n!$  quand  $x = 0$ . Tous les autres termes de cette somme s'annulent en 0 pour la même raison que ci-dessus. Donc :

$$u_n^{(n)}(0) = n! a_n.$$

16. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $x = 0$ , alors ce cas fut déjà traité dans la question **Q15**, et on a bien  $|u_n^{(p)}(0)| = 0 \leq \frac{|0|^{n-p-1}}{\sqrt{n}} p! 2^n$ . Supposons donc  $x \neq 0$ . D'après (2) et l'inégalité triangulaire, on a :

$$|u_n^{(p)}(x)| \leq \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} |a_n| \cdot |\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)|.$$

D'après la question **Q13**, pour tout  $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$  on a :

$$|a_n| \cdot |\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)| = \frac{1}{\sqrt{n!}} |\alpha_n| \cdot |\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}},$$

et on en déduit :

$$|u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (p-k)! = \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} \sum_{k=0}^p \frac{p!}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

car  $n \geq p$  et nous sommes des termes positifs. Or, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n,$$

donc nous avons démontré :

$$|u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n,$$

et c'est le résultat attendu.

17. Pour répondre à cette question, nous allons appliquer le théorème de dérivation terme à terme sur tout segment de  $\mathbb{R}$ , dans le cas des applications de classe  $C^p$ .

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . D'après la question précédente, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p+1, \forall x \in [-a, a], \quad |u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n \leq \frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}},$$

donc, si l'on considère la norme infinie sur  $[-a, a]$  :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p+1, \quad 0 \leq \|u_n^{(p)}\|_{\infty} \leq \frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3)$$

Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , montrons que la série  $\sum_{n \geq p+1} \frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}$  converge. C'est une série à termes positifs, et pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , pour tout  $n$  au voisinage de  $+\infty$ , on a :

$$\frac{\frac{p! 2^{n+1} |a|^{n-p}}{((n+1)!)^{\frac{1}{2}}}}{\frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{2|a|}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1,$$

donc la série  $\sum_{n \geq p+1} \frac{p! 2^n |a|^{n-p-1}}{(n!)^{\frac{1}{2}}}$  converge d'après la règle de D'Alembert. On en déduit, d'après

(3) et le théorème de comparaison des séries à termes positifs, que la série de fonctions  $\sum_{n \geq p+1} u_n^{(p)}$  converge normalement, donc uniformément (et simplement), sur tout segment de la forme  $[-a, a]$ . D'après le théorème de dérivation terme à terme, vérifié sur tout segment de  $\mathbb{R}$  (on peut en effet inclure tout segment de  $\mathbb{R}$  dans un segment de la forme  $[-a, a]$ ), on en déduit que la somme

$\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$  est de classe  $C^p$  sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , donc de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Il en est donc de

même de  $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  (on ajoute une somme finie de fonctions de classe  $C^\infty$ ), et on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad U^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(x).$$

18. On a :  $U(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(0)$ . Il est évident, d'après la définition de  $u_n$ , que  $u_n(0) = a_n$  si  $n = 0$  et  $u_n(0) = 0$  si  $n \geq 1$ . Donc  $U(0) = a_0$ .

Soit  $p \geq 1$  un entier. Alors :

$$U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(0),$$

et d'après la question **Q15** on a  $u_n^{(p)}(0) = 0$  dès que  $p \leq n - 1$  (c'est-à-dire  $n \geq p + 1$ ) et  $u_p^{(p)}(0) = p!a_p$ , donc :

$$U^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^p u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + u_p^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p,$$

d'où le résultat.

19. Soit  $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs réelles. Inspirés par la question précédente, on cherche une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = a_0, \\ b_1 = u'_0(0) + 1!a_1, \\ b_2 = u''_0(0) + u'_1(0) + 2!a_2, \\ \vdots \\ \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b_p = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p. \end{array} \right.$$

Pour cela, on note qu'on peut construire une telle suite par récurrence ainsi, en posant successivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = b_0, \\ \alpha_0 = a_0, \\ \forall x \in \mathbb{R}, u_0(x) = a_0 \varphi_{\alpha_0}(x), \end{array} \right. \text{ puis : } \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \left\{ \begin{array}{l} a_p = \frac{1}{p!} \left( b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) \right), \\ \alpha_p = \sqrt[p]{p!} a_p, \\ \forall x \in \mathbb{R}, u_p(x) = a_p x^p \varphi_{\alpha_p}(x). \end{array} \right.$$

Il s'agit bien d'une construction par récurrence licite (la définition de  $a_p$  n'utilise que  $b_p$  et des fonctions déjà définies pour des rangs strictement inférieurs à  $p$ ). Alors, d'après les questions

**Q17** et **Q18**, l'application  $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad f^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!a_p = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + b_p - \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) = b_p,$$

ce qui démontre bien l'existence d'une fonction  $f$  indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on ait :  $f^{(p)}(0) = b_p$ .

\* \* \*