# DS10 du 31/01/2026 (4h)
# Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de deux exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

## Exercice 1 : Sur les matrices antisymétriques réelles

### Présentation générale

On se propose ici d'étudier certaines propriétés des matrices antisymétriques réelles. Après avoir étudié un exemple en dimension 2, on utilise les matrices antisymétriques pour paramétrer un sous-ensemble de matrices orthogonales.

### Notations

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels. On note $I_n$ la matrice identité d'ordre $n$.
Pour tout entier $n > 0$, on désigne par $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques réelles de taille $n$ et par $O_n(\mathbb{R})$ celui de matrices réelles orthogonales de taille $n$. Le groupe *spécial orthogonal* est constitué des matrices orthogonales de déterminant 1.

### Partie I - Un exemple en dimension 2

1. Soit $t$ un réel et soit $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres complexes de $A$.
2. Calculer $R = (I_2 + A)(I_2 - A)^{-1}$ et montrer que $R$ est une matrice du groupe spécial orthogonal.
3. Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
   Calculer $M = (I_2 + R_\theta)^{-1}(I_2 - R_\theta)$.

### Partie II - Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

Dans ce qui suit, $n$ désigne un entier $> 0$.

4. Soient $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $C$ est inversible et $BC = CB$, alors $BC^{-1} = C^{-1}B$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Soit $\lambda$ une valeur propre complexe de $A$ et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. En calculant de deux façons
$$(AX)^T\overline{X},$$
   montrer que $\lambda$ est un complexe imaginaire pur (éventuellement nul).
6. Déduire de la question précédente que si $A$ est antisymétrique réelle, alors $I_n + A$ est inversible et
$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$$
   Montrer que $R = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ est une matrice orthogonale.
7. Calculer le déterminant de $R$.
8. Soit $R$ une matrice orthogonale telle que $I_n + R$ soit inversible. Démontrer que la matrice $A = (I_n + R)^{-1}(I_n - R)$ est antisymétrique.

9. On suppose ici que $n = 3$ et que $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée par la base canonique. Soit $r$ une rotation d'angle $\theta \in ]-\pi, \pi[$ autour d'un axe orienté par un vecteur $u$ de norme 1 et soit $R \in O_3(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base canonique.
   Montrer qu'il existe une matrice antisymétrique $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que
   $$R = (I_3 + A)^{-1}(I_3 - A)$$

* * *

# Exercice 2 : Théorème de Borel

Dans la **partie I**, on considère deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et on s'interroge sur l'existence d'un développement en série entière dans un voisinage de 0 pour ces fonctions.
Dans la **partie II**, indépendante de la **partie I**, on démontre le théorème de Borel en construisant, pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une fonction $f$ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.

## Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $\Gamma_p$ et déterminer une relation entre $\Gamma_{p+1}$ et $\Gamma_p$.
3. En déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la valeur de $\Gamma_p$.
4. Montrer que $f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x)$.
5. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$.
   La fonction $f$ est-elle développable en série entière en 0 ?

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}.$$

6. Montrer que $g$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $g^{(p)}(x)$.
7. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a : $\left|g^{(p)}(0)\right| \geqslant p^{2p}e^{-p}$.
8. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!}x^p$.
   La fonction $g$ est-elle développable en série entière en 0 ?

## Partie II – Le théorème de Borel

9. Déterminer deux nombres complexes $a$ et $b$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-i} + \frac{b}{x+i}.$$

10. On considère la fonction $\psi$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \dfrac{1}{x-i}$.
Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-i)^{p+1}}.$$

11. Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la dérivée $p$-ième de la fonction $\varphi_1$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

12. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|(x+i)^{p+1} - (x-i)^{p+1}| \leqslant 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}$.
En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :
$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

13. Pour tout réel $\alpha$, notons $\varphi_\alpha$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{1+\alpha^2 x^2}.$$
Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$ :
$$|\alpha| \cdot \left|\varphi_\alpha^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on lui associe la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{a_n x^n}{1+n! a_n^2 x^2}.$$

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\alpha_n = \sqrt{n!}a_n$. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 0$, tout entier $n \geqslant p$ et tout réel $x$, on a :
$$u_n^{(p)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x).$$

15. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$, on a : $u_n^{(p)}(0) = 0$, et déterminer $u_n^{(n)}(0)$.

16. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, tout entier $p \in [\![0, n-1]\!]$ et tout réel $x$, on a :
$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n.$$

17. En déduire que la fonction $U = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est bien définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

18. Montrer que $U(0) = a_0$ et que pour tout entier $p \geqslant 1$, on a : $U^{(p)}(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p$.

19. Déduire de ce qui précède que pour toute suite réelle $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il existe une fonction $f$ indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on ait : $f^{(p)}(0) = b_p$.
*Ce résultat est appelé théorème de Borel. Il a été démontré par Peano et Borel à la fin du XIX$^e$ siècle.*

* * *