DS10 du 31/01/2026 (4h)
Sujet A (MPI*)

Exercice 1 : Théorèmes taubériens

Adaptation du corrigé de M. Laamoum

1. La série entière $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n z^n$ a un rayon de convergence égal à 1 (car série géométrique de raison $-z$, qui converge ssi $|z|<1$), sa somme $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-x)^n = \frac{1}{1+x}$ possède une limite finie (égale à 1/2) lorsque $x \to 1^-$, mais pourtant, en $x=1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n$ diverge grossièrement.

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$, on a
$$|S_n - f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right|.$$
Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 < 1 - x^k = (1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1}) \leq k(1-x)$, donc
$$|S_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|x^k.$$
Par hypothèse, $ka_k \to 0$, donc (ka_k) est bornée, ce qui entraîne $\sup\limits_{k>n}(k|a_k|) < +\infty$, permettant de majorer la seconde somme :
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|x^k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k}{n}|a_k|x^k \leq \frac{1}{n}\sup_{k>n}(k|a_k|)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{\sup\limits_{k>n}(k|a_k|)}{n} \times \frac{x^{n+1}}{1-x}$$
Finalement, puisque $x^{n+1} \leq 1$, on en déduit
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|x^k \leq \frac{\sup\limits_{k>n}(k|a_k|)}{n(1-x)},$$
donc
$$|S_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \frac{\sup\limits_{k>n}(k|a_k|)}{n(1-x)}.$$

   (b) En choisissant $x = 1 - \dfrac{1}{n}$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\left|S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sup_{k>n}(k|a_k|).$$
La suite (ka_k) tend vers 0 par hypothèse, donc par le lemme de Cesàro, $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} k|a_k| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
De plus, $\sup\limits_{k>n}(k|a_k|) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ (facile à obtenir avec des ε à partir de la définition quantifiée de $ka_k \to 0$) donc par somme et majoration, $S_n - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
Or, par hypothèse et composition de limites, $f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} S$, donc finalement $S_n \underset{n\to+\infty}{\to} S$, ce qui montre que la série $\sum a_n$ converge et sa somme vaut S.
Ainsi, on a obtenu le théorème (Taubérien faible).

3. (a) Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\to} S \in \mathbb{C}$, alors en posant pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g(x) = f(x) - S = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

où $b_0 = a_0 - S$ et $b_n = a_n$ pour tout $n \geq 1$, on a g développable en série entière sur $]-1,1[$ et $g(x) \underset{x\to 1^-}{\to} 0$. Donc si on montre le théorème (Taubérien fort) pour $S = 0$, on obtient en l'appliquant à g que $\sum b_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = 0$, c'est-à-dire $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.
On peut donc supposer sans perte de généralité que $S = 0$.

(b) On montre facilement que l'ensemble

$$\Theta = \left\{ \theta : [0,1] \to \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1[,\ \sum_{n\geq 0} a_n \theta(x^n) \text{ converge et } \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \theta(x^n) = 0 \right\}$$

est un SEV de $\mathcal{F}([0,1],\mathbb{R})$, donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. En effet :

- la fonction nulle est dans Θ (la série nulle converge et vaut 0 en tout point) ;
- si θ_1 et θ_2 sont dans Θ et λ dans $\mathbb{R}$, alors la fonction $\theta = \lambda\theta_1 + \theta_2$ est dans Θ puisque pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n \theta(x^n)$ converge comme combinaison linéaire de séries convergentes, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \theta(x^n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \theta_1(x^n) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \theta_2(x^n) \underset{x\to 1^-}{\to} 0$$

par opérations sur les limites.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$. Il existe donc $Q = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ$. Nous avons alors, pour tout $x \in [0,1[$:

$$\sum_{n\geq 0} a_n P(x^n) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n Q(x^n) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \sum_{k=0}^{d} \lambda_k x^{nk} = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k \sum_{n\geq 0} a_n (x^{k+1})^n = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k f(x^{k+1}),$$

qui est bien une série convergente comme combinaison linéaire de séries convergentes (puisque $x^{k+1} \in [0,1[\subset]-1,1[$ pour tout k). De plus, par opérations sur les limites :

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P(x^n) = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k \lim_{x\to 1^-} f(x^{k+1}) = 0,$$

(puisque $\lim\limits_{1^-} f = 0$ par hypothèse), ce qui montre que $P \in \Theta$.

(d) Par linéarité de la somme, de l'intégrale et de la limite, il suffit de montrer que la formule proposée est vraie pour tout monôme $P = X^k$ avec $k \in \mathbb{N}$. C'est le cas car pour tout $x \in [0,1[$:

$$(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (x^n)^k = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} (x^{k+1})^n = \frac{x^{k+1}(1-x)}{1-x^{k+1}} = \frac{x^{k+1}}{1+x+\cdots+x^k},$$

donc

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n (x^n)^k = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^{k+1}}{1+x+\cdots+x^k} = \frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt.$$

Ainsi, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)dt.$$

(e) Pour tout $x \in [0,1[$, on a par nullité de g sur $[0,1/2[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) = \sum_{n\in\mathbb{N},\ x^n \geq 1/2} a_n = \sum_{n=0}^{-\ln(2)/\ln(x)} a_n.$$

Si on montre que $g \in \Theta$, on aura alors

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{-\ln(2)/\ln(x)} a_n = 0,$$

ce qui entraîne par composition de limites que

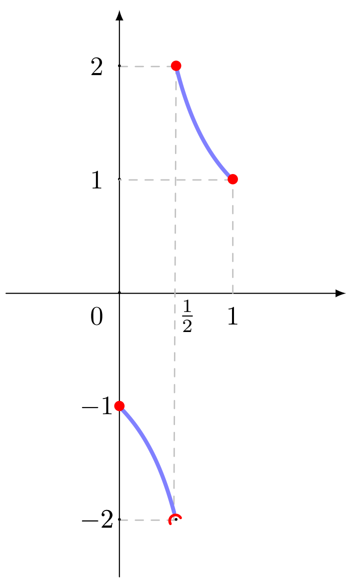
$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = 0$$

(en choisissant pour tout $N \in \mathbb{N}$, le réel x tel que $N = -\ln(2)/\ln(x)$, c'est-à-dire $x = x_N = e^{-\ln(2)/N}$, et on a bien $x_N \underset{N\to+\infty}{\to} 1^-$).
Ainsi, l'appartenance de g à l'ensemble Θ entraîne que la série $\sum a_n$ converge, et sa somme vaut $S = 0$, ce qui prouve le théorème (Taubérien fort).

(f) On a

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

dont la représentation graphique est la suivante :

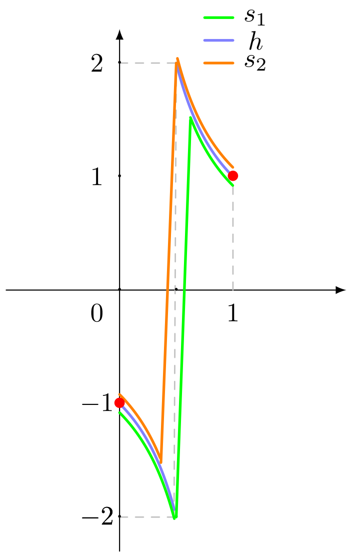


Étant donné $\varepsilon > 0$, on choisit α , a et b tels que les fonctions s_1 et s_2 définies sur $[0,1]$ par

$$s_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ a(x-\frac{1}{2}) - 2 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\alpha\right] \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}+\alpha, 1\right] \end{cases}$$

$$s_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}-\alpha\right] \\ b(x-\frac{1}{2}) + 2 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

vérifient : $s_1(\frac{1}{2}+\alpha) = h(\frac{1}{2}+\alpha)$, $s_2(\frac{1}{2}-\alpha) = h(\frac{1}{2}-\alpha)$ et $\displaystyle\int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))\, dx \leqslant \varepsilon$.
On obtient $a = \frac{1}{\alpha}\left(h(\frac{1}{2}+\alpha)+2\right)$ et $b = \frac{1}{\alpha}\left(2 - h(\frac{1}{2}-\alpha)\right)$.



Les fonctions s_1 et s_2 coïncident sur $\left[0, \frac{1}{2}-\alpha\right] \cup \left[\frac{1}{2}+\alpha, 1\right]$ donc

$$\int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))\, dx = \int_{\frac{1}{2}-\alpha}^{\frac{1}{2}+\alpha} (s_2(x) - s_1(x))\, dx.$$

Remarquons que $\forall x \in [0,1]\,,\ -2 \leq s_1(x) \leq 2$ et $-2 \leq s_2(x) \leq 2$, donc

$$\int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))\, dx \leq 8\alpha.$$

Il suffit alors de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{8}$. D'où l'existence de $s_1, s_2 \in \mathcal{C}^0([0,1])$ vérifiant

$$s_1 \leqslant h \leqslant s_2 \text{ et } \int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))\, dx \leqslant \varepsilon.$$

(g) Soit $\varepsilon > 0$, s_1 et s_2 fixés. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass, les fonctions continues s_1 et s_2 sont limites uniformes de suites de polynômes sur le segment $[0,1]$, donc il existe $T_1, T_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\sup_{x\in[0,1]} |T_1(x) - s_1(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \sup_{x\in[0,1]} |T_2(x) - s_2(x)| \leqslant \varepsilon.$$

(h) Pour tout $x \in [0,1]$,

$$P_1(x) = x + x(1-x)\left(T_1(x) - \varepsilon\right),\ P_2(x) = x + x(1-x)\left(T_2(x) + \varepsilon\right) \text{ et } Q(x) = \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}.$$

On a :
- $P_1(0) = P_2(0) = 0$ et $P_1(1) = P_2(1) = 1$.
- $T_1 - \varepsilon \leq s_1 \leq T_1 + \varepsilon$ et $T_2 - \varepsilon \leq s_2 \leq T_2 + \varepsilon$ donc $T_1 - \varepsilon \leqslant h \leqslant T_2 + \varepsilon$.

Sur $]0,1[$, $h(x) = \dfrac{g(x) - x}{x(1-x)}$ donc $P_1 \leqslant g \leqslant P_2$, qui est aussi vérifiée pour 0 et 1.
- $Q(x) = \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)} = T_2(x) - T_1(x) + 2\varepsilon$, or $T_2 \leq s_2 + \varepsilon$ et $-T_1 \leq -s_1 + \varepsilon$, donc $0 \leq Q \leq s_2 - s_1 + 4\varepsilon$ ce qui donne

$$0 \leqslant \int_0^1 Q(x)dx \leqslant \int_0^1 s_2(x) - s_1(x)dx + 4\varepsilon \leqslant 5\varepsilon$$

(i) Soit $x \in]0,1[$. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant \frac{M}{n}$ et on a $P_1 \leqslant g \leqslant P_2$ donc

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \left(g(x^n) - P_1(x^n)\right) \\ &\leqslant M \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(P_2(x^n) - P_1(x^n)\right) \quad \text{(puisque } g(1) = P_1(1)) \\ &\leqslant M \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n (1 - x^n) Q(x^n).\end{aligned}$$

Or $1 - x^n = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) \leqslant n(1-x)$ donc

$$\boxed{\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g\left(x^n\right) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1\left(x^n\right)\right| \leqslant M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q\left(x^n\right)}$$

(j) Soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+6M}$ reprenons les étapes de la question 5 avec ε' .
La question **i)** donne

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g\left(x^n\right)\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1\left(x^n\right)\right| + M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q\left(x^n\right) \qquad (1).$$

D'après la question **d)** on a

$$\lim_{z \to 1^-} (1-z) \times \sum_{n=0}^{+\infty} z^n Q(z^n) = \int_0^1 Q(t) dt$$

donc il existe $0 < \alpha < 1$ tel que

$$\forall x \in [1-\alpha, 1[, \qquad \left|(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n Q(x^n) - \int_0^1 Q(t) dt\right| \leqslant \varepsilon'.$$

De plus, la question **h)** donne $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 Q(t) \leqslant 5\varepsilon'$, donc par suite

$$\forall x \in [1-\alpha, 1[, \qquad M(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n Q(x^n) \leqslant 6M\varepsilon' \qquad (2).$$

De plus, $P_1 \in X\mathbb{R}[X]$ ainsi, d'après **c)** ,

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n) = 0$$

Donc il existe $0 < \beta < 1$ tel que

$$\forall x \in [1-\beta, 1[, \qquad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n)\right| \leqslant \varepsilon' \qquad (3).$$

Soit $\eta = \min(\alpha, \beta)$ les relations $(1), (2)$ et (3) donnent

$$\forall x \in [1-\eta, 1[, \qquad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g\left(x^n\right)\right| \leqslant \varepsilon' \ (1 + 6M) = \varepsilon.$$

Ainsi $g \in \Theta$ ce qui prouve le théorème (Taubérien fort) .

* * *

Exercice 2 : La fonction de Wallis

Adaptation du corrigé de M. Laamoum

1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^k}{k^2}$ est égal à 1, donc σ est définie au moins sur $]-1,1[$. En outre, cette série converge absolument pour $x=1$ et $x=-1$ donc le domaine de définition de σ est exactement égal à $[-1,1]$.
Ensuite, on a $\sup\limits_{x\in[-1,1]}\left|\dfrac{x^k}{k^2}\right| = \dfrac{1}{k^2}$, donc la série $\sum \frac{x^k}{k^2}$ converge normalement et uniformément sur $[-1,1]$. Puisque les fonctions : $x \mapsto \dfrac{x^k}{k^2}$ sont continues, cela entraîne que σ est continue sur $[-1,1]$.
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g : t \mapsto (\sin(t))^x = e^{x\ln(\sin(t))}$ est définie, continue et positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $g(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{-x}}$ donc g est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ si et seulement si $x > -1$, d'où la fonction $f : x \mapsto \int_0^{\pi/2}(\sin(t))^x \, dt$ a pour domaine réel de définition $]-1,+\infty[= I$.
   (b) Soit $x > -1$, on a
$$\begin{aligned} f(x+2) &= \int_0^{\pi/2} (-\cos'(t)) \times (\sin(t))^{x+1}\, dt \\ &= \left[-\cos(t)(\sin(t))^{x+1}\right]_0^{\pi/2} + (x+1)\int_0^{\pi/2} (\cos(t))^2(\sin(t))^x\, dt \\ &= (x+1)\int_0^{\pi/2}\left(1-(\sin(t))^2\right)(\sin(t))^x\, dt \\ &= (x+1)\ (f(x)-f(x+2)) \end{aligned}$$
   ce qui donne
$$(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2).$$
3. (a) La fonction $g := (x,t) \mapsto (\sin(t))^x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathrm{e}^{x\ln(\sin(t))}\right) = (\ln(\sin(t)))^2\,(\sin(t))^x.$$
   Pour x dans I, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\ln^2(t)}{t^{-x}} \underset{t\to 0}{=} o(\dfrac{1}{t^\lambda})$ pour $\lambda \in]-x,1[$, ce qui donne l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   Soit $[a,b] \subset I$, on a
$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \le (\ln(\sin(t)))^2\,(\sin(t))^a = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(a,t).$$
   Cette domination sur tout segment de I par une fonction intégrable entraine que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et :
$$\forall x \in I \ \ ,\ f'(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)).(\sin(t))^x\, dt \ \text{ et } \ f''(x) = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^2\,(\sin(t))^x\, dt.$$
   (b) Pour tout $x \in I$, $f'(x) \le 0$ et $f''(x) \ge 0$ (d'après les expressions intégrales précédentes) donc f est décroissante et convexe sur I.
4. On a pour tout x dans I : $(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$; donc
$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} (x+1)f(x) &= \lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} (x+2)f(x+2) \\ &= f(1) \end{aligned}$$
$f(1) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)dt = 1$, d'où
$$\boxed{f(x) \underset{\substack{x\to -1 \\ >}}{\sim} \frac{1}{x+1}}$$

5. (a) Soit n un entier naturel . D'après la question 2.(b) on a $(n+2)f(n+2) = (n+1)f(n)$ puis, en multipliant les deux membres par $f(n+1)$

$$(n+2)f(n+2)f(n+1) = (n+1)f(n+1)f(n) \ .$$

Ainsi, la suite $((n+1).f(n+1).f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
On en déduit que pour tout entier naturel n, $(n+1)f(n+1)f(n) = f(1)f(0) = \frac{\pi}{2}$ et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}} (*)$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n+2) \leq f(n+1) \leq f(n)$, on divise cette relation par $f(n)$ qui est strictement positif ,

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{f(n+2)}{f(n)} \leq \frac{f(n+1)}{f(n)} \leq 1$$

le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(n+1)}{f(n)} = 1$ et $f(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n)$.
La relation (*) donne $f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
Soit $x \geq 1$ et $n = \mathrm{e}(x)$ (*partie entière*) , on a $f(n+1) < f(x) \leq f(n)$ et

$$\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}},$$

ainsi :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}}$$

6. ...

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $(\ln(\sin(t)))^n \underset{t\to 0}{=} o(\dfrac{1}{\sqrt{t}})$, donc l'intégrale D_n est convergente.

(b) On a $D_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt$, on fait le changement $u = \frac{\pi}{2} - t$ on obtient

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt.$$

8. • On a $f'(0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \ dt = D_1$.
Calcul de D_1 : on a

$$\begin{aligned} 2D_1 &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)\cos(t))dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\frac{\sin(2t)}{2})dt \\ &= -\frac{\pi\ln(2)}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))dt \end{aligned}$$

dans cette dernière intégrale posons $2t = u$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))dt &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))du \\ &= \frac{1}{2}D_1 + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))du \end{aligned}$$

le changement $v=\pi-u$ donne $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin(u))du = D_1$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(2t))dt = D_1$,
d'où $D_1 = -\frac{\pi\ln(2)}{2}$.
Finalement $\boxed{f'(0) = -\frac{\pi\ln(2)}{2}}$.

- $f'(1) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(t)).(\sin(t))\ \ dt$. Soit $\varepsilon\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, par une intégration par parties on a :

$$\int_\varepsilon^{\pi/2}\ln(\sin(t)).(\sin(t))\ dt = \big[-\ln(\sin(t))\cos(t)\big]_\varepsilon^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}\ dt$$

le changement de variable $\cos(t)=u$ donne

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{\pi/2}\frac{\cos^2(t)}{\sin(t)}\ dt &= \int_\varepsilon^{\pi/2}\frac{\cos^2(t)}{1-\cos^2(t)}\sin(t)\ dt\\ &= \int_0^{\cos(\varepsilon)}\frac{u^2}{1-u^2}\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{\cos(\varepsilon)}-1+\frac{1}{2(1-u)}+\frac{1}{2(1+u)}\mathrm{d}u\\ &= \big[-u-\tfrac12\ln(1-u)+\tfrac12\ln(1+u)\big]_0^{\cos(\varepsilon)}\end{aligned}$$

Ainsi

$$f'(1) = -1+\frac{\ln(2)}{2}+\lim_{\varepsilon\to0}\left(\ln(\sin(\varepsilon))\cos(\varepsilon)-\tfrac12\ln(1-\cos(\varepsilon))\right)$$

et on a

$$\begin{aligned}\ln(\sin\varepsilon)\cos(\varepsilon)-\tfrac12\ln(1-\cos(\varepsilon)) &= \ln(\varepsilon+o(\varepsilon))(1+o(\varepsilon))-\tfrac12\ln(\frac{\varepsilon^2}{2}+o(\varepsilon^2))\\ &= \frac{\ln(2)}{2}+o(\varepsilon)\end{aligned}$$

donc $\boxed{f'(1)=\ln(2)-1}$

9. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $D_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}(\ln(\sin(t)))^n\ \ dt$, posons $u=-\ln(\sin(t))$ donc

$$du = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)}dt = -\frac{\sqrt{1-\sin^2(t)}}{\sin(t)}dt = -\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2u}}}{\mathrm{e}^{-u}}dt = -\sqrt{\mathrm{e}^{2u}(t)-1}dt$$

ce qui donne

$$(-1)^nD_n = \int_0^{+\infty}\frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\ \mathrm{d}u.$$

(b) On a $\dfrac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}} = \mathrm{e}^{-u}u^n - \dfrac{u^n\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}$.
Posons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}u^n du$, on verifie facilement que cette intégrale converge , $I_n = nI_{n-1}$ et $I_n = n!$, donc

$$(-1)^nD_n = n! + \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\ \mathrm{d}u.$$

Ensuite, par convexité, $e^{2u}-1\geq 2u$ pour tout $u\geq0$ donc

$$\frac{u^n\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\leq u^{n-\frac12}\mathrm{e}^{-u}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} u^{n-\frac{1}{2}} e^{-u} du &= \int_0^{+\infty} \left(u^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}u}\right)\left(u^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}u}\right) du \\
&\leq \left(\int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} du \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{(n!)(n-1)!} \\
&\leq \frac{n!}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-u}}{\sqrt{e^{2u}-1}} du = o(n!)$ et

$$\boxed{D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!}$$

10. Soit $x \in]-1,1[$ on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{\pi/2} e^{x\ln(\sin(t))}\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\ln(\sin(t)))^n}{n!}\, dt.
\end{aligned}$$

Posons $f_n(t) = \frac{(x\ln(\sin(t)))^n}{n!}$, f_n est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\sum f_n$ converge simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $t \mapsto (\sin(t))^x$ qui est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Enfin, on a

$$\int_0^{\pi/2} |f_n(t)|\ dt = \frac{|x|^n}{n!}(-1)^n D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$$

donc $\displaystyle\sum \int_0^{\pi/2} |f_n(t)|\ dt$ converge. Le théorème d'interversion des symboles $\sum$ et $\int$ sur un intervalle quelconque donne alors :

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n},$$

ce qui montre que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

11. • Ψ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
• Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\Psi(x) = \ln\left(\frac{a^2}{2}(\cos(2x)+1) + \frac{b^2}{2}(1-\cos(2x))\right) = \ln\left(\frac{a^2-b^2}{2}\cos(2x) + \frac{a^2+b^2}{2}\right)$ donc

$$\begin{aligned}
\Psi'(x) &= \frac{\left(b^2-a^2\right)\sin(2x)}{\frac{a^2-b^2}{2}\cos(2x) + \frac{a^2+b^2}{2}} \\
&= \frac{2\left(b^2-a^2\right)\sin(2x)}{(a^2-b^2)\cos(2x) + \frac{(b+a)^2+(b-a)^2}{2}} \\
&= \frac{4\left(b^2-a^2\right)\sin(2x)}{(b+a)^2 - 2\left(b^2-a^2\right)\cos(2x) + (b-a)^2} \\
&= \frac{4\rho\sin(2x)}{1-2\rho\cos(2x)+\rho^2}
\end{aligned}$$

ainsi $\Psi'(x) = 4\ \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{1-\rho e^{2ix}}\right)$.

De plus $|\rho| < 1$ donc $\dfrac{1}{1-\rho e^{2ix}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k e^{2ikx}$ d'où

$$\boxed{\Psi'(x) = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)}$$

12. Posons $g_n : x \mapsto \rho^k \sin(2kx)$, on a $|g_n(x)| \leq |\rho|^k$ et $|\rho| < 1$ donc $\sum g_n$ converge normalement et uniformément sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, le théorème d'interversion des symboles $\int$ et $\sum$ sur le segment $[0, x]$ donne alors :

$$\Psi(x) - \Psi(0) = 4 \int_0^x \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx)\ dx = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \int_0^x \sin(2kx)\ dx.$$

$\Psi(0) = 2\ln(a)$, donc

$$\Psi(x) = 2\ln(a) - 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx) - 1}{2k} \rho^k$$

on sait que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} = -\ln(1-\rho) = -\ln(\frac{2a}{b+a})$, d'où

$$\boxed{\Psi(x) = 2\ln\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k.}$$

13. Puisque $|\rho| < 1$ alors

$$|\Psi(x)| \leq \left|2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\rho|^k}{k} = \left|2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| - 2\ln(1 - |\rho|)\,.$$

Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \Psi(x) \frac{\cos(2kx)}{k} \rho^k$ converge normalement et uniformément sur $\mathbb{R}$, donc

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^\pi \Psi(x) dx - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \int_0^\pi \cos(2kx) \Psi(x) dx$$

Soit n dans $\mathbb{N}$, la série$\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\cos(2nx)\cos(2kx)}{k} \rho^k$ converge normalement et uniformément sur $\mathbb{R}$, alors

$$\int_0^\pi \cos(2nx)\Psi(x) dx = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^\pi \cos(2nx) dx - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^k}{k} \int_0^\pi \cos(2kx)\cos(2nx) dx$$

et on a

$$\int_0^\pi \cos(2kx)\cos(2nx) dx = \int_0^\pi \tfrac{\cos(2(n+k)x) + \cos(2(n-k)x)}{2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } n = k \\ 0 \text{ si } n \neq k \end{cases}$$

par suite

$$\int_0^\pi \Psi(x) dx = 2\pi \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \ \text{ et } \ \int_0^\pi \cos(2nx)\Psi(x) dx = -\pi \frac{\rho^n}{n} \qquad \text{si } n \neq 0$$

ainsi

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\rho^{2k}}{k^2} = 4\pi \left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma\left(\rho^2\right).$$

14. Pour $n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n+1}$ et $b_n = \frac{n}{n+1}$.
   (a) Soit $t \in]0, \pi[$ on a

$$\Psi_n(t) = \ln\left(a_n^2 \cos^2(t) + b_n^2 \sin^2(t)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ln(\sin(t))$$

   donc (Ψ_n) converge simplement sur $]0, \pi[$.

(b) On a : $f''(0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^2 \, dt$, la suite $\left(\Psi_n^2\right)$ converge simplement sur $]0, \pi[$ vers la fonction $t \mapsto 4 (\ln(\sin(t)))^2$.
Pour $n \geq 2$

$$|\Psi_n(x)| \leq \left|2 \ln\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)\right| - 2 \ln\left(\frac{a_n - b_n}{a_n + b_n}\right) = 2 \ln(2) - \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$$

comme $\frac{1}{2} \leq \frac{n-1}{n+1} \leq 1$.donc

$$|\Psi_n(x)| \leq 3 \ln(2)$$

le théorème de la convergence dominée sur $]0, \pi[$ donne :

$$4 \int_0^{\pi} (\ln(\sin(t)))^2 \, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} (\Psi_n(x))^2 \, dx$$

De la question 13 on a

$$\int_0^{\pi} \Psi_n(x)^2 dx = 4\pi \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma\left(\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2\right).$$

la fonction σ est continue sur $[-1, 1]$ donc

$$4 \int_0^{\pi} (\ln(\sin(t)))^2 \, dt = 4\pi (\ln(2))^2 + 2\pi\sigma(1)$$

De plus

$$\int_0^{\pi} (\ln(\sin(t)))^2 \, dt = \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^2 \, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (\ln(\sin(t)))^2 \, dt$$

et

$$\int_{\pi/2}^{\pi} (\ln(\sin(t)))^2 \, dt \overset{x=\pi-t}{=} \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(x)))^2 \, dx$$

donc

$$8 \int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^2 \, dt = 4\pi (\ln(2))^2 + \frac{\pi^3}{3}$$

d'où $\boxed{f''(0) = \dfrac{\pi}{2} (\ln(2))^2 + \dfrac{\pi^3}{24} .}$

* * *