DS10 du 31/01/2026 (4h)
Sujet A (MPI*)

Le sujet se compose de deux exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

Exercice 1 : Théorèmes taubériens

Dans cet exercice, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de nombres complexes.
On rappelle le *théorème radial d'Abel* : si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme $f : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, alors

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n \text{ converge}\right) \Longrightarrow \left(\lim_{\substack{x\to R^-\\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n\right).$$

1. Exhiber une série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence 1 et de somme f, telle que $f(x)$ converge quand $x\to 1^-$ ($x\in\mathbb{R}$) et telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ ne converge pas.
Ainsi, la réciproque du théorème radial d'Abel est fausse en général.
On va maintenant présenter des cas où cette réciproque est vraie.

2. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f. Soit $S\in\mathbb{C}$.
Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S \text{ et } a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Longrightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S\right). \quad \text{(Taubérien faible)}$$

Dans la suite de cette question on suppose que $\lim\limits_{\substack{x\to 1^-\\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S$ et que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(a) Démontrer que pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in]0,1[$ on a

$$|S_n - f(x)| \leqslant (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \frac{\sup\limits_{k>n}(k|a_k|)}{n(1-x)},$$

où $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

(b) En déduire (Taubérien faible) en spécifiant $x = x_n = 1-1/n$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

3. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et de somme f. Soit $S\in\mathbb{C}$.
Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S \text{ et } a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \Longrightarrow \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S\right). \quad \text{(Taubérien fort)}$$

(a) Démontrer que, sans perte de généralité, on peut supposer que $S = 0$.

On suppose désormais que $\lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x\in\mathbb{R}}} f(x) = S$ et que $a_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, avec $S = 0$.

(b) On définit Θ de la manière suivante :

$$\Theta = \left\{ \theta : [0,1] \to \mathbb{R} \;; \forall x \in [0,1[,\ \sum_{n\geqslant 0} a_n \theta(x^n) \text{ converge et } \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \theta(x^n) = 0 \right\}.$$

Démontrer que Θ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$. Démontrer que $P \in \Theta$.

(d) Démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \lim_{\substack{x\to 1^- \\ x\in\mathbb{R}}} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t.$$

On définit la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1/2, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(e) Démontrer que pour établir (Taubérien fort), il suffit de démontrer que $g \in \Theta$.

(f) Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{g(x) - x}{x(1-x)} & \text{si } x \in]0,1[, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Étant donné $\varepsilon > 0$, démontrer qu'il existe $s_1, s_2 \in \mathcal{C}^0([0,1])$ vérifiant

$$s_1 \leqslant h \leqslant s_2 \text{ et } \int_0^1 (s_2(x) - s_1(x))\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.$$

Représenter graphiquement h et deux telles fonctions s_1, s_2.

À partir de maintenant, $\varepsilon > 0$, s_1 et s_2 sont fixés.

(g) Justifier l'existence de $T_1, T_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\sup_{x\in[0,1]} |T_1(x) - s_1(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \sup_{x\in[0,1]} |T_2(x) - s_2(x)| \leqslant \varepsilon.$$

On pose, pour tout $x \in [0,1]$,

$$P_1(x) = x + x(1-x)(T_1(x) - \varepsilon),\ P_2(x) = x + x(1-x)(T_2(x) + \varepsilon) \text{ et } Q(x) = \frac{P_2(x) - P_1(x)}{x(1-x)}.$$

(h) Démontrer que

$$P_1(0) = P_2(0) = 0, \quad P_1(1) = P_2(1) = 1, \quad P_1 \leqslant g \leqslant P_2 \text{ et } 0 \leqslant \int_0^1 Q(x)\mathrm{d}x \leqslant 5\varepsilon.$$

(i) Démontrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_1(x^n) \right| \leqslant M(1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} x^n Q(x^n).$$

(j) Conclure.

* * *

Exercice 2 : La fonction de Wallis

Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1,+\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies par :

$$\sigma(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x)=\int_0^{\pi/2}(\sin(t))^x\ \mathrm{d}t.$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f (domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série entière, ...)

Continuité de σ

1 ▷ Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.

Dans la suite, on admettra que $\sigma(1)=\frac{\pi^2}{6}$.

Étude de f

2 ▷ **(a)** Déterminer le domaine de définition de f.

(b) Vérifier que

$$\forall x\in I,\qquad (x+1)f(x)=(x+2)f(x+2).$$

3 ▷ **(a)** Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

(b) Justifier que f est décroissante et convexe sur I.

4 ▷ Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1.

5 ▷ **(a)** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$f(n)f(n+1)=\frac{\pi}{2(n+1)}.$$

(b) En déduire que

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

6 ▷ Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

Développement en série entière de f

Si $n\in\mathbf{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\ln(\sin(t)))^n\ \mathrm{d}t$.

7 ▷ **(a)** Justifier que, si $n\in\mathbf{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente.

(b) Montrer que

$$D_1=\int_0^{\pi/2}\ln(\cos(t))\mathrm{d}t.$$

8 ▷ Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

9 ▷ **(a)** Vérifier que si $n\in\mathbf{N}^*$, alors

$$(-1)^nD_n=\int_0^{+\infty}\frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\ \mathrm{d}u.$$

(b) En déduire que

$$D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

Indication : écrire $n!$ *comme une intégrale.*

10 ▷ Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Calcul de $f''(0)$

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b, et on pose

$$\rho = \frac{b-a}{b+a}.$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \qquad \Psi(x) = \ln\left(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x\right).$$

11 ▷ Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi'(x) = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx).$$

12 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k}\rho^k.$$

13 ▷ En conclure que

$$\int_0^\pi \Psi(x)^2 \mathrm{d}x = 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma\left(\rho^2\right).$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}.$$

14 ▷ **(a)** Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall t \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right],\ \Psi_n(t) = \ln\left(a_n^2\cos^2 t + b_n^2\sin^2 t\right).$$

(b) En déduire $f''(0)$.

* * *