Corrigé l'épreuve de Mathématiques de CCP, filière PSI, 2018

C. Antonini, Lycée Stanilas, Cannes

Problème I

Q 1. Soit $k \in \mathbb{N}$ (prendre $k \in [\![0, n]\!]$ ne simplifie rien dans cette question).
On note $P = X^k$. Si $k = 0$, alors $P' = 0$ et donc $\Delta(X^0) = 0$.
Si $k \neq 0$, alors $P' = kX^{k-1}$ et donc $\Delta(X^k) = kXX^{k-1} = kX^k$.
On constate que pour $k = 0$, l'expression kX^k vaut aussi $0 = \Delta(X^0)$. On peut donc écrire

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \Delta(X^k) = kX^k.$$

Notons que pour tout entier naturel k, le vecteur X^k est un vecteur propre de Δ, associé à la valeur propre Δ.

Q 2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Je note $Q = (\Delta - Id)(P)$ de sorte que le second membre $\Delta \circ (\Delta - Id)(P)$ soit égal à $\Delta(Q)$.
On a ainsi $Q = \Delta(P) - Id(P) = XP' - P$ puis par linéarité de Δ,

$$\Delta(Q) = \Delta(XP') - \Delta(P) = X(XP')' - XP' = X(1P' + XP'') - XP' = XP' + X^2P'' - XP' = X^2P''.$$

On a bien démontré que (pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$), $XP'' = \Delta \circ (\Delta - Id)(P)$.

NOTA BENE : En utilisant Q1, il y a "plus malin" : on prouve l'égalité pour $P = X^k$ "seulement" : soit $k \in \mathbb{N}$, alors $(\Delta - Id)(X^k) = \Delta(X^k) - Id(X^k) = kX^k - X^k = (k-1)X^k$, et par linéarité

$$\Delta \circ (\Delta - Id)(X^k) = \Delta((k-1)X^k) = (k-1)\Delta(X^k) = (k-1)kX^k.$$

Par ailleurs, $(X^k)'' = (kX^{k-1})' = k(k-1)X^{k-2}$ donc $X^2(X^k)'' = (k-1)kX^k$ (normalement, comme dans Q1, il faudrait traiter à part le cas $k \leq 1$...)
On arrive en tout cas à constater que les endomorphismes $P \mapsto X^2P''$ et $\Delta \circ (\Delta - Id)$ sont égaux sur la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Par linéarité, ces deux endomorphismes sont donc égaux sur $Vect\big((X^k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = \mathbb{R}[X]$.

Q 3. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors il existe $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

On a alors par linéarité $\Delta(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \Delta(X^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, CQFD.
Autre possibilité : si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $deg(P) \leq n$, donc $deg(P') \leq n-1$ donc $deg(\Delta(P)) = deg(XP') \leq n$...

Q 4. Grâce au résultat de Q1, on écrit immédiatement

$$Mat_{(1=X^0, X, \ldots, X^n)}(\Delta_n) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 1 & & & (0) & \\ & & 2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & (0) & & & n-1 & \\ & & & & & n \end{pmatrix}$$

On pourrait aussi écrire cette matrice $= diag(0, 1, 2, ..., n-1, n)$, il s'agit évidemment d'une matrice carrée d'ordre $\underline{n+1}$.

Q 5. On utilise évidemment Q2 !
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $X^2P'' = \Delta((\Delta - Id)(P)) = \Delta(\Delta(P)) - \Delta(Id(P)) = \Delta^2(P) - \Delta(P)$, et on reconnaît $aXP' = a\Delta(P)$.
On a alors directement

$$\Phi(P) = X^2P'' + aXP' = \Delta^2(P) - \Delta(P) + a\Delta(P) = \Delta^2(P) + (a-1)\Delta(P) = [\Delta^2 + (a-1)\Delta](P),$$

d'où l'égalité demandée.
$\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ en tant que composée d'endomorphismes, donc $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ par combinaison linéaire d'endomorphismes.

Q 6. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ par Q3 et ainsi $\Delta^2(P) = \Delta(\Delta(P)) \in \mathbb{R}_n[X]$, toujours par Q3. On en déduit que la combinaison linéaire $\Phi(P) = \Delta^2(P) + (a-1)\Delta(P)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 7. Notons D_n la matrice (qui est diagonale !) de Δ_n dans la base $(1, X, ..., X^n)$.
L'égalité $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ s'écrit sur $\mathbb{R}_n[X]$: $\Phi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n$ et donc matriciellement (comme la matrice de Δ^2 est le carré de la matrice de Δ) :

$$Mat_{(1=X^0,X,...,X^n)}(\Phi_n) = D_n^2 + (a-1)D_n = ...$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 1^2+1(a-1) & & & (0) & \\ & & 2^2+2(a-2) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & (0) & & & (n-1)^2+(n-1)(a-1) & \\ & & & & & n^2+n(a-1) \end{pmatrix}$$

La matrice de Φ_n est diagonale dans la base canonique, donc Φ_n est évidemment diagonalisable !

Q 8. On voit immédiatement $\varphi = \Phi + bId$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, et si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = \Phi(P) + bP \in \mathbb{R}_n[X]$ car $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ par Q6.
En rajoutant bId_n (je note Id_n l'application identité de $\mathbb{R}_n[X]$) les égalités reliant Φ à Δ (ou Φ_n à Δ_n) s'écrivent :

$$\varphi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\Delta_n + bId_n.$$

Q 9. Il suffit de rajouter bI_{n+1} à la matrice (diagonale) trouvée Q7, on trouve comme matrice de φ_n dans la base $(1, X, ..., X^n)$:

$$= \begin{pmatrix} b & & & & & \\ & 1^2+1(a-1)+b & & & (0) & \\ & & 2^2+2(a-2)+b & & & \\ & & & \ddots & & \\ & (0) & & & (n-1)^2+(n-1)(a-1)+b & \\ & & & & & n^2+n(a-1)+b \end{pmatrix}$$

On peut aussi simplement l'écrire (pratique au vu de Q10 et Q11) :

$$diag\big((k^2 + (a-1)k + b)_{k \in [\![0,n]\!]}\big).$$

Remarque (également utilisable Q7) : en notant $Q(X) = X^2 + (a-1)X + 1$, on a $\varphi_n = Q(\Delta_n)$ et comme (pour $k \in [\![0,n]\!]$) on sait que X^k est un vecteur propre de Δ_n associé à la valeur propre k, on en déduit que X^k est un vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $Q(k)$... nombres qui forment les éléments diagonaux.

Q 10. La matrice de φ_n (dans la base canonique) étant diagonale, le rang de φ_n est le nombre de coefficients diagonaux non nuls, ce qui revient (*via* le théorème du rang) à dire que la dimension du noyau de φ_n est le nombre de coefficients diagonaux nuls de la matrice trouvée Q9.
Ainsi, aussi bien pour cette question que pour la suivante, la dimension de $Ker(\varphi_n)$ est le nombre d'éléments $k \in [\![0,n]\!]$ tq $k^2 + (a-1)k + b = 0$, i.e. le nombre de racines de (1) dans $[\![0,n]\!]$.
Dans le cadre de Q10, l'équation (1) possède deux racines dans $[\![0,n]\!]$. On a alors $dim(Ker(\varphi_n)) = 2$. Plus précisément, les éléments diagonaux nuls correspondent à $k = m_1$ et $k = m_2$. Si le coefficient diagonal est nul, alors la colonne est nulle, ce qui signifie que $\varphi_n(X^k)$ est nul lorsque k est solution de (1).
Ainsi, X^{m_1} et X^{m_2} sont deux éléments du noyau. Comme ces deux vecteurs sont linéairement indépendants $(m_1 \neq m_2)$ et que $Ker(\varphi_n)$ est de dimension 2, ils forment une base de ce noyau :

$$Ker(\varphi_n) = Vect(X^{m_1}, X^{m_2}).$$

Q 11. Ici, l'équation (1) possède une racine dans $[\![0,n]\!]$. On a alors $dim(Ker(\varphi_n)) = 1$. Plus précisément, l'élément diagonal nul correspond à $k = m$, donc (même principe que dans Q10), X^m est un élément (non nul) du noyau qui est de dimension 1, donc (X^m) forme une base de ce noyau :

$$Ker(\varphi_n) = Vect(X^m).$$

Q 12. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si $P \in Ker(\varphi)$, on note $n = deg(P)$. On a alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$, et on peut écrire $\varphi_n(P) = \varphi(P) = 0$, donc $P \in Ker(\varphi_n)$.
Par les questions précédentes, P est un multiple de X^m où m est une racine entière de (1). Il y a ainsi 3 solutions possibles (l'éq (1) est du 2nd degré donc possède au maximum 2 racines !!!) :

- L'équation (1) possède deux racines distinctes ENTIÈRES (dans $\mathbb{N}$) : m_1 et m_2, et alors $Ker(\varphi_n) = Vect(X^{m_1}, X^{m_2})$, de dimension 2.
- L'équation (1) possède une unique racines ENTIÈRE (dans $\mathbb{N}$) : m, et alors $Ker(\varphi_n) = Vect(X^m)$, de dimension 1.
- L'équation (1) ne possède aucune racines ENTIÈRE (dans $\mathbb{N}$), et alors $Ker(\varphi_n) = \{0\}$, de dimension 0.

Dans tous les cas, la dimension du noyau de φ est le nombre de racines dans $\mathbb{N}$ de l'équation (1).

Q 13. Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2, linéaire et homogène, dont les coefficients sont des fonctions continues, et le coefficient de y'' ne s'annule pas sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.
L'ensemble des solutions est alors un sous-espace vectoriel de dimension 2 des fonctions 2 fois dérivables sur $I =]0, +\infty[$.
La réponse est la même en remplaçant partout I par J.

Q 14. Soit y une solution de (2) sur I. Alors comme exp est deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans I, la fonction $g = y \circ \exp$ est deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Par dérivée de fonctions composées (et de produits pour la dérivée seconde), on a en outre $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$g'(t) = e^t.y'(e^t) \quad (*) \qquad \text{et} \qquad g''(t) = e^t.y'(e^t) + e^t.e^t.y''(e^t) = e^t.y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t) \quad (**)$$

(je fais exprès d'écrire $(e^t)^2$ qui correspondra à x^2, au lieu d'écrire e^{2t}...)
Par hypothèse, y solution de (2) sur I signifie y deux fois dérivable sur I (je l'ai déjà utilisé ci-dessus) et

$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0.$$

En remplaçant x par $e^t \in I$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (e^t)^2 y''(e^t) + ae^t y'(e^t) + by(e^t) = 0 \quad (***)$$

En remplaçant à l'aide de $(*)$ et de $(**)$ on a alors $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g''(t) + (a-1)g'(t) + bg(t) &= e^t.y'(e^t) + (e^t)^2 y''(e^t) + (a-1)e^t.y'(e^t) + by(e^t) \\ &= (e^t)^2 y''(e^t) + ae^t y'(e^t) + by(e^t) = 0 \text{ d'après } (***), \end{aligned}$$

donc g est bien solution de (3).

Q 15. Il faut faire le travail dans l'autre sens... en dérivant deux fois $y = g \circ \ln$... je ne le tape pas.
Une autre possibilité est d'utiliser les résultats de structure !
L'ensemble des solutions de (3) sur $\mathbb{R}$ est un e.v. de dimension 2.
L'application Ψ qui à y associe $y \circ \exp$ est un isomorphisme de l'ensemble des fonctions 2 fois dérivables sur I vers l'ensemble des fonctions 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
Mais l'image par Ψ de l'ensemble des solutions de (2) sur I est contenu dans l'ensemble des solutions de (3) sur $\mathbb{R}$ d'après Q14. On a ainsi une inclusion entre 2 espaces de dimension 2, donc une égalité ! : y solution de (2) sur $I \iff y \circ \exp$ solution de (3) sur $\mathbb{R}$. Le sens $(\Leftarrow)$ donne le résultat de Q15.

Q 16. Traitons donc les 2 cas :

- Cas $a = 3$ et $b = 1$.
  L'équation (3) est alors $u'' + 2u' + u = 0$, d'équation caractéristique associée $r^2 + 2r + 1 = 0$. On constate que $r = -1$ est racine double de l'équation, la solution générale de (3) est alors

  $$g(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t} \qquad \big((A, B) \in \mathbb{R}^2\big)$$

  Par l'équivalence des questions 14-15, la solution générale de (2) sur I est alors

  $$y(x) = g(\ln x) = Ae^{-\ln x} + B(\ln x)e^{-\ln x} = A \cdot \frac{1}{x} + B \cdot \frac{\ln x}{x} \qquad \big((A, B) \in \mathbb{R}^2\big)$$

- Cas $a=1$ et $b=4$.
  L'équation (3) est alors $u''+0u'+4u=0$, d'équation caractéristique associée $r^2+4=0$, de racines $r_1=2i$ et $r_2=-2i$. La solution générale de (3) est alors

  $$g(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t)\qquad\big((A,B)\in\mathbb{R}^2\big)$$

  Par l'équivalence des questions 14-15, la solution générale de (2) sur I est alors

  $$y(x)=g(\ln x)=A\cos(2\ln x)+B\sin(2\ln x)\qquad\big((A,B)\in\mathbb{R}^2\big)$$

Q 17. Comme Q14 en prenant garde au $-$... On note que (heureusement !) pour tout $t\in\mathbb{R}$, $-\exp(t)\in J$...
Et comme dans Q15, on montrerait que réciproquement, si g solution de (3) sur $\mathbb{R}$, alors $y(x)=g(\ln(-x))$ solution de (2) sur J...

Q 18. On effectue la résolution séparément sur I et sur J, puis on effectuera le "recollement" :

- Résolution sur I. On commence (comme dans Q16) en résolvant (3) pour $a=1$ et $b=-4$:
  L'équation (3) est alors $u''+0u'-4u=0$, d'équation caractéristique associée $r^2-4=0$, de racines $r_1=2$ et $r_2=-2$. La solution générale de (3) est alors

  $$g(t)=Ae^{2t}+Be^{-2t}\qquad\big((A,B)\in\mathbb{R}^2\big)$$

  Par l'équivalence des questions 14-15, la solution générale de (2) sur I est alors

  $$y(x)=g(\ln x)=Ae^{2\ln x}+Be^{-2\ln x}=Ax^2+B\cdot\frac{1}{x^2}\qquad\big((A,B)\in\mathbb{R}^2\big)$$

- Résolution sur J. Par Q17, on effectue la résolution de (3) sur $\mathbb{R}$. C'est d'ailleurs la même que sur I, la solution générale de (3) est alors

  $$g(t)=Ce^{2t}+De^{-2t}\qquad\big((C,D)\in\mathbb{R}^2\big)$$

  Par l'équivalence de Q17, la solution générale de (2) sur J est alors

  $$y(x)=g(\ln(-x))=Ce^{2\ln(-x)}+Be^{-2\ln(-x)}=C(-x)^2+D\cdot\frac{1}{(-x)^2}=Cx^2+D\cdot\frac{1}{x^2}\qquad\big((C,D)\in\mathbb{R}^2\big)$$

(ANALYSE) Soit y une solution de (2) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Alors y sera solution de (2) sur I et sur J donc par ce qui précède il existe $(A,B,C,D)\in\mathbb{R}^4$ tq

$$y(x)=\begin{cases}Ax^2+B\cdot\frac{1}{x^2} & \text{si } x>0\\ Cx^2+D\cdot\frac{1}{x^2} & \text{si } x<0\end{cases}$$

Mais y est continue en 0, donc notamment $\lim\limits_{x\to0^+}y(x)=y(0)$. En multipliant par x^2 (qui tend vers 0) on en déduit

$$0=\lim_{x\to0^+}x^2y(x)=\lim_{x\to0^+}(Ax^4+B)=B,$$

donc $B=0$.
De même, $D=0$, en regardant la même limite en 0^-. On peut maintenant affirmer qu'il existe A et C tq

$$y(x)=\begin{cases}Ax^2 & \text{si } x\geq0\\ Cx^2 & \text{si } x\leq0\end{cases}$$

y' possèdera alors une dérivée à droite et à gauche en 0, respectivement égales à $2A$ et $2C$. Ces deux valeurs doivent être égales à $y''(0)$, ce qui implique $C=A$.
Ainsi, on voit que y solution de classe $\mathcal{C}^2$ de (2) sur $\mathbb{R}$ implique que $\forall x\in\mathbb{R}$, $y(x)=Ax^2$ (où $A\in\mathbb{R}$).

(SYNTHÈSE) Soit $A\in\mathbb{R}$, on pose $(\forall x\in\mathbb{R})$ $y(x)=Ax^2$. La fonction y est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x\in\mathbb{R}$, $y'(x)=2Ax$ et $y''(x)=2A$ d'où

$$\forall x\in\mathbb{R}, x^2y''(x)+axy'(x)+by(x)=2x^2+1.x.2x-4.x^2=0,$$

donc y est solution de (2) sur $\mathbb{R}$.

CONCLUSION : L'ensemble des solutions de (2) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ est $\big\{x\mapsto Ax^2\ ;\ A\in\mathbb{R}\big\}$.

Q 19. Si l'on considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres (réels ou) complexes, alors le rayon de convergence de cette série entière est

$$\begin{aligned} R &= \sup\Big(\Big\{r \in \mathbb{R}_+ \ ; \ \text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\Big\}\Big) \\ &= \sup\Big(\Big\{r \in \mathbb{R}_+ \ ; \ \exists M > 0 \ : \forall n \in \mathbb{N}, \ |a_n r^n| \leq M\Big\}\Big) \end{aligned}$$

[Une **propriété** est qu'alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < R$ alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge (absolument) et que si $|z| > R$ alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge (grossièrement)]

Q 20. La fonction somme J_0 sera de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et on a $\forall x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \\ J_0'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}, \\ J_0''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

En multipliant $J_0'(x)$ par x et $J_0''(x)$ par x^2 on obtient les expressions suivantes (qui apparaissent dans l'équation (4)) : $\forall x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} xJ_0'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^n, \\ x^2 J_0''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^n. \end{aligned}$$

Noter que le terme $nc_n x^n$ est nul pour $n = 0$, et que les termes $n(n-1)c_n x^n$ sont nuls pour $n = 0$ et $n = 1$.
On pourrait donc faire démarrer la 1ère somme à $n = 0$ et la 2nde à $n = 0$ ou $n = 1$... c'est ce que l'on fait fréquemment...
Mais ici, le terme en $J_0(x)$ commence par $c_0 x^0 = 1$, donc la quantité $x^2 J_0(x)$ ne fait apparaître que des puissances supérieures (ou égales) à 2.
On va donc "au contraire" faire démarrer toutes les sommes à la puissance 2, en écrivant si nécessaire les termes en plus en dehors.
On écrit donc (avec un décalage d'indice $n = k + 2$ pour la 1ère série) $\forall x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} x^2 J_0(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} c_{n-2} x^n, \\ xJ_0'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^n = c_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} n c_n x^n, \\ x^2 J_0''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^n. \end{aligned}$$

Le fait que J_0 est solution de (4) sur $]-R, R[$ signifie alors que $\forall x \in]-R, R[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^n + c_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n c_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} c_{n-2} x^n = 0,$$

ou encore en regroupant les 3 séries en une seule que $\forall x \in]-R, R[$,

$$c_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \big(n(n-1)c_n + nc_n + c_{n-2}\big) x^n = 0.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière (l'égalité ayant lieu sur $]-R, R[$ pour $R > 0$) on en déduit :

- Identification du coefficient de $x^1 = x$: $c_1 = 0$,
- Identification du coefficient de x^n (pour $n \geq 2$) : $\forall n \geq 2$, $n(n-1)c_n + nc_n + c_{n-2} = 0$.
  Le coeff de c_n est $n(n-1) + n = n^2 \neq 0$ pour $n \geq 2$ donc cette relation peut s'écrire

$$\forall n \geq 2, \quad c_n = \frac{-c_{n-2}}{n^2} \quad (*)$$

En partant de $c_1 = 0$, la relation de récurrence $(*)$ donne (avec $n = 3$) $c_3 = 0$, puis (avec $n = 5$) $c_5 = 0$.
Il faudrait rédiger la récurrence (je ne le fais pas) on trouve aisément $\forall k \in \mathbb{N}$, $c_{2k+1} = 0$.
Quant à la valeur de c_{2k}, on ne nous demande pas de la trouver. Comme on nous la donne, on la vérifie par récurrence. Je note donc (pour $k \in \mathbb{N}$) H_k la propriété $c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}$. Démontrons donc cette propriété par récuerrence.
__Initialisation :__ Pour $k = 0$, on a $\dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2} = \dfrac{1}{1.1^2} = 1$ et $c_0 = 1$ par hypothèse de l'énoncé, donc la propriété H_0 est vraie.
__Hérédité :__ Supposons la propriété vraie pour un certain entier $k \in \mathbb{N}$.
On utilise alors la relation $(*)$ avec $n = 2k + 2 = 2(k+1) \geq 2$, ce qui donne

$$c_{2(k+1)} = \frac{-c_{2k}}{(2(k+1))^2} = \frac{(-1).(-1)^k}{4(k+1)^2.4^k(k!)^2}.$$

Puisque $4.4^k = 4^{k+1}$ et $(k+1)^2(k!)^2 = ((k+1)k!)^2 = (k+1)^2$ on obtient

$$c_{2(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}}{4^{k+1}.((k+1)!)^2},$$

et la propriété est prouvée au rang $k + 1$.
Ainsi, le résultat est bien démontré par récurrence.

Q 21. Les coefficients d'indices impairs étant nuls, on a $J_0(x) = \displaystyle\sum_{k \geq 0} c_{2k}x^{2k} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Je note $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = \dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k} \neq 0$, et on a $\forall k$,

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{|x|^{2k+2}}{|x|^{2k}} \cdot \left|\frac{c_{2k+2}}{c_{2k}}\right| = |x^2| \cdot \frac{1}{(2k+2)^2} \xrightarrow{k \to \infty} 0 < 1,$$

donc (règle de d'Alembert) la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} u_k$ converge absolument pour tout réel x (la CV est évidente en $x = 0$).
Le rayon de CV de la série entière est donc $R = +\infty$.

Q 22. La fonction J_0 est donc continue sur $\mathbb{R}$. Si (J_0, f) est liée dans l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $f = \lambda J_0$ sur $]0, r[$ ($J_0(0) = c_0 = 1$ donc par continuité, J_0 ne peut être nulle sur $]0, r[$).
La fonction J_0 étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est bornée sur le segment $[0, r]$, donc sur $]0, r[$. Il en est donc de même de f.

Q 23. Si $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est solution, alors par produit de Cauchy, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < R_0 = min(R_\alpha, R_\beta)$:

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k x^k$$

où (résultat sur les produits de Cauchy)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$$

La fonction série entière $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k x^k$ est constante égale à 1 sur $]-R, R[$ ssi $\gamma_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = 0$.
Puisque $\gamma_0 = \alpha_0\beta_0 = \beta_0$ (hyp $\alpha_0 = 1$) on retrouve exactement les relations (5).

Q 24. Il suffit de se rappeler Q19 ! Si $r < R_\alpha$, la suite $(\alpha_n r^n)$ est bornée
(OU : si $r < R_\alpha$, la série $\sum \alpha_n r^n$ CV absolument, donc CV ; alors, son terme général $(\alpha_n r^n)$ tend vers 0, donc est borné).
On a bien l'existence de $M > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\alpha_n r^n| \leq M$, d'où le résultat en divisant par $r^n > 0$.

Q 25. On a en fait un système "triangulaire" (certes infini), mais : la 1ère égalité donne β_0, puis l'égalité suivante donne pour $n = 1$: $\alpha_0\beta_1$ en fonction de β_0, on en déduit β_1 car $\alpha_0 \neq 0$, puis l'égalité donne pour $n = 2$: $\alpha_0\beta_1$ en fonction de β_0 et β_1, on en déduit β_2 car $\alpha_0 \neq 0$, et ainsi de suite.

Pour rédiger, on va montrer par récurrence FORTE que (pour tout n) β_n est défini de manière unique, et vérifie l'inégalité (sauf pour $n = 0$)...

- Pour $n = 0$, la 1ère égalité de (5) impose une unique solution, qui est $\beta_0 = 1$.
- Pour $n = 1$, la 2ère égalité de (5) implique (puisque $\alpha_0 = 1$) $\beta_1 = -\alpha_1\beta_0 = -\alpha_1$ (d'où l'existence et l'unicité), puis d'après Q24 $|\beta_1| = |\alpha_1| \leq \frac{M}{r} = \frac{M(M+1)^{1-1}}{r^1}$, donc l'inégalité est respectée.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose β_0, ..., β_n définis de manière unique et β_1, ..., β_n vérifiant l'inégalité...
Alors la 2nde inégalité de (5) pour la valeur de $n + 1$ implique (puisque $\alpha_0 = 1$) :

$$\beta_{n+1} = -\alpha_1\beta_n - \alpha_2\beta_{n-1} ... - \alpha_n\beta_1 - \alpha_{n+1}\beta_0$$

On a déjà existence et unicité de β_{n+1}. On peut ensuite le majorer par inégalité triangulaire, puis en utilisant Q24 pour majorer les $\alpha_{...}$ et l'hypothèse de récurrence pour majorer les $\beta_{...}$, en traitant à part le cas de $\beta_0 = 1$.
On a ainsi

$$\begin{aligned} |\beta_{n+1}| &\leq |\alpha_1|.|\beta_n| + |\alpha_2|.|\beta_{n-1}| + ... + |\alpha_n|.|\beta_1| + |\alpha_{n+1}|.1 \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{r^k}.\frac{M(M+1)^{(n+1)-k-1}}{r^{n+1-k}} + \frac{M}{r^{n+1}} \\ &\leq \frac{M}{r^{n+1}}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} M(M+1)^{n-k}\right) \qquad (*) \end{aligned}$$

On a une somme de termes d'une suite géométrique de raison $M + 1 \neq 1$, donc on peut la calculer (en posant $i = n - k$) :

$$\sum_{k=1}^{n} M(M+1)^{n-k} = M\sum_{j=0}^{n-1}(M+1)^j = M\frac{(M+1)^n - 1}{M+1-1} = (M+1)^n - 1$$

En "réinjectant" dans $(*)$ il vient

$$|\beta_{n+1}| \leq \frac{M}{r^{n+1}}(1 + (M+1)^n - 1) = \frac{M(M+1)^{n+1-1}}{r^{n+1}},$$

donc la propriété est vérifiée au rang $n + 1$.

L'existence et l'unicité de la suite vérifiant (5) est ainsi démontrée, ainsi que les inégalités demandées.

Q 26. Si on note $\rho = \dfrac{r}{M+1} > 0$, on a d'après Q25

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\beta_k\rho^k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k} \cdot \frac{r^k}{(M+1)^k} = \frac{M}{M+1} = c^{ste},$$

donc la suite $(\beta_k\rho^k)$ est bornée.
On en déduit (cf Q19) que le rayon de CV de $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$ vérifie $R_\beta \geq \rho > 0$.

Q 27. Si λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$ il en sera de même de y, et l'on aura $\forall x \in]0, r[$,

$$y'(x) = \lambda'(x)J_0(x) + \lambda(x)J_0'(x) \quad \text{et} \quad y''(x) = \lambda''(x)J_0(x) + 2\lambda'(x)J_0'(x) + \lambda(x)J_0''(x).$$

Ainsi, y sol de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si $\forall x \in]0, r[$,

$$x^2(\lambda''(x) + 2\lambda'(x)J_0'(x) + \lambda(x)J_0''(x)) + x(\lambda'(x)J_0(x) + \lambda(x)J_0'(x)) + x^2\lambda(x)J_0(x) = 0,$$

et l'on peut regrouper les termes en mettant λ, λ' et λ'' en facteur, i.e. y sol de (4) sur $]0,r[$ si et seulement si $\forall x \in]0,r[$,

$$x^2\lambda''(x)J_0(x) + \lambda'(x)[2x^2J_0'(x) + xJ_0(x)] + \lambda(x)[x^2J_0''(x)) + xJ_0'(x) + x^2J_0(x)] = 0.$$

Le terme $x^2J_0''(x)) + xJ_0'(x) + x^2J_0(x)$ est nul (puisque J_0 est solution de (4), donc y sol de (4) sur $]0,r[$ si et seulement si $\forall x \in]0,r[$,

$$x^2\lambda''(x)J_0(x) + \lambda'(x)[2x^2J_0'(x) + xJ_0(x)] = 0 \qquad (*)$$

Par ailleurs, si on note $\psi : x \mapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$, alors la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,r[$, et alors ψ est constante sur $]0,r[$ si et seulement si $\forall x \in]0,r[$, $\psi'(x) = 0$, i.e. ssi $\forall x \in]0,r[$,

$$J_0^2(x)\lambda'(x) + 2xJ_0'(x)J_0(x)\lambda'(x) + xJ_0^2(x)\lambda''(x) = 0 \qquad (**)$$

Les équations $(*)$ et $(**)$ sont proportionnelles (rapport $J_0(x)/x$) donc équivalentes entre elles, et on a le résultat voulu.

Q 28. La fonction J_0 est une série entière de rayon de CV infini, donc par produit de Cauchy de J_0 par elle-même, la fonction J_0^2 est somme d'une série entière, de rayon de CV infini.
On a $J_0(0) = c_0 = 1$, donc $J_0(0)^2 = 1$.

Q 29. D'après Q27, si l'on prend pour λ une primitive de $x \mapsto \frac{1}{xJ_0^2(x)}$, alors $y : x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ sera solution de (4).
En notant $J_0^2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k x^k$, de rayon de CV infini, alors par Q23 à Q26, on peut définir $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\beta_k x^k$, de rayon de CV $R_\beta > 0$, tq $J_0^2 g = 1$ sur $]-R_\beta, R_\beta[$. En d'autres termes, $1/J_0^2$ est DSE au voisinage de 0.
Le coefficient β_0 vaut 1, et pour faire apparaître le ln on commence en écrivant $\dfrac{1}{J_0^2(x)} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\beta_k x^k$ pour tout x dans $]-R_\beta, R_\beta[$, donc *a fortiori* sur $]0, R_\beta[$.
On a alors $\forall x \in]0, R_\beta[$, $\dfrac{1}{xJ_0^2(x)} = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\beta_k x^{k-1}$. En primitivant, on choisit $\lambda(x) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\beta_k}{k}x^k$ pour tout $x \in]0, R_\beta$.
La fonction $x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est alors (d'après Q27) une solution de (4).
Cette solution peut s'écrire $\ln(x)J_0(x) + \eta(x)$, où $\eta(x)$ est le produit de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\beta_k}{k}x^k$ et de $J_0(x)$.
En tant que produit (par produit de Cauchy) d'une série entière de rayon de CV R_β et d'une série entière de rayon de CV infini, η possède un rayon de CV $R_\eta \geq R_\beta$.
Et la solution a la forme demandée.

Q 30. Notons $J_1 : x \mapsto \eta(x) + \ln(x)J_0(x)$ la solution de (4) trouvée Q29.
En tant que série entière, $\eta(x) \to \eta(0)$ quand $x \to 0$, donc η est bornée au voisinage de 0. En revanche, $J_0(x) \to J_0(0) = 1$ donc $J_0(x)\ln(x) \to -\infty$, lorsque $x \to 0^+$.
Ainsi, J_1 N'est PAS bornée sur $]0,r[$.
Par Q22, on en déduit que (J_0, J_1) est une famille libre.

CONCLUSION : (J_0, J_1) est une famille libre (de 2 élts !) de l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$, et cet ensemble est un e.v. de dimension 2.
Ainsi, (J_0, J_1) est une base de l'ensemble des solutions.

L'ensemble recherché s'écrit donc $Vect(J_0, J_1)$, ou si l'on préfère, la solution générale est $x \mapsto AJ_0(x) + BJ_1(x)$, pour $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

Problème II

Q 31. La variable aléatoire vérifie $0 \leq |X| \leq 1$. Puisque 1 (variable aléatoire constante) possède une espérance, on en déduit par comparaison que X est d'espérance finie.
Ou alors, on détaille plus : si X est une v.a. (pour variable aléatoire) finie, alors X possède une espérance.
Sinon, on note $X(\Omega) = \{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont les valeurs 2 à 2 différentes prises par X.
Je note aussi $p_n = \mathbf{P}(X = x_n)$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$). On sait que $\sum\limits_{n\geq 0} p_n$ converge (et vaut 1).
L'hypothèse X à valeurs dans $[-1,1]$ signigie que $\forall n$, $x_n \in [-1,1]$, ou encore $|x_n| \leq 1$.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |x_n p_n| \leq p_n$.

Par théorème de comparaison pour les séries de termes positifs, la CV de la série $\sum_{n\geq 0} p_n$ implique la CV de la série $\sum_{n\geq 0} |x_n p_n|$, i.e. il y a convergence <u>absolue</u> de la série $\sum_{n\geq 0} x_n \mathbf{P}(X = x_n)$.
C'est la définition du fait que X possède une espérance.

Q 32. Si Y est une variable aléatoire finie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, l'inégalité de Markov s'écrit

$$\forall \alpha > 0, \quad \mathbf{P}(Y \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(Y)}{\alpha}.$$

Preuve : on fixe $\alpha > 0$. On note $\{y_0, y_1, ..., y_N\}$ les valeurs 2 à 2 différentes prises par Y ; naturellement, il s'agit de nombres ≥ 0.
Parmi les indices, on note $I_1 = \{k \in [\![0, N]\!] \ / \ y_k < \alpha\}$ et $I_2 = \{k \in [\![0, N]\!] \ / \ y_k \geq \alpha\}$, de sorte que $[\![0, N]\!] = I_1 \cup I_2$ (union disjointe).
On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{N} y_k \mathbf{P}(Y = y_k) \\
&= \sum_{k \in I_1} \underbrace{y_k}_{\geq 0} \underbrace{\mathbf{P}(Y = y_k)}_{\geq 0} + \sum_{k \in I_2} \underbrace{y_k}_{\geq \alpha} \underbrace{\mathbf{P}(Y = y_k)}_{\geq 0} \\
&\geq \sum_{k \in I_2} \alpha \mathbf{P}(Y = y_k) \\
&\geq \alpha \sum_{k \in I_2} \mathbf{P}(Y = y_k)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, la définition de I_2 fait que $(Y \geq \alpha) = \bigcup_{k \in I_2} (Y = \alpha_k)$ (union disjointe) et par suite $\mathbf{P}(Y \geq \alpha) = \sum_{k \in I_2} \mathbf{P}(Y = y_k)$.
Le résultat précédent se récrit donc $\mathbf{E}(Y) \geq \alpha \mathbf{P}(Y \geq \alpha)$, d'où l'inégalité de Markov après division par $\alpha > 0$.

Si Y est une v.a. discrète, le résultat tient toujours, à condition que Y reste à valeurs positives, et évidemment que Y possède une espérance finie.
La seule différence dans la preuve est que les sommes deviennent des séries, et dans les notations on a maintenant :

- $Y(\Omega) = \{y_k \ ; \ k \in \mathbb{N}\}$
- $I_1 = \{k \in \mathbb{N} \ / \ y_k < \alpha\}$ et $I_2 = \{k \in \mathbb{N} \ / \ y_k \geq \alpha\}$...
- et alors, $\mathbb{N}$ est l'union disjointe de I_1 et I_2,
- et $(Y \geq \alpha) = \bigcup_{k \in I_2} (Y = \alpha_k)$ (union disjointe).

Q 33. Il suffit d'appliquer le résultat précédent à $Y = |X|$, qui possède une espérance finie !

Q 34. Si $t > 0$, la fonction $x \mapsto e^{tnx}$ est strictement croissante (et sa réciproque aussi) donc on a $\forall (x, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$, $x \geq \varepsilon \ \Leftrightarrow \ e^{tnx} \geq e^{tn\varepsilon}$.
Ainsi, il y a égalité entre les événements $(S_n \geq \varepsilon)$ et $(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon})$, leurs probabilités sont donc les mêmes.
L'encadrement de $|X|$ (donc de chaque X_i) implique $|ntS_n| = |\underbrace{t}_{>0}||X_1 + ... + X_n|) \leq nt$, donc $0 \leq e^{ntS_n} \leq e^{nt}$.
Tout comme X dans Q31, on en déduit que e^{nS_n} admet une espérance (il faut remplacer les 1 par des $e^{nt} =$ *constante*...)
Et la v.a. $Y = e^{nS_n}$ est clairement positive, donc on peut lui appliquer l'inégalité de Markov (avec $\alpha = e^{nt\varepsilon} > 0$).
On aboutit ainsi à

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(e^{ntS_n} \geq e^{nt\varepsilon}) \leq \frac{\mathbf{E}(e^{tnS_n})}{e^{nt\varepsilon}} \quad (*)$$

Enfin, $tnS_n = tX_1 + ... + tX_n$ donc $e^{tnS_n} = e^{tX_1} ... e^{tX_n}$. Par indépendance mutuelle des (X_i), les $(e^{tX_i})_{1 \leq i \leq n}$ sont des v.a. mutuellement indépendantes (et possédant toutes une espérance) donc le produit possède une espérance et espérance du produit $=$ produit des espérances :

$$\mathbf{E}(e^{ntS_n}) = \mathbf{E}(e^{tX_1} ... e^{tX_n}) = \mathbf{E}(e^{tX_1}) ... \mathbf{E}(e^{tX_n}).$$

Toutes les v.a. X_i ont la même loi (celle de X), donc les e^{tX_i} ont toute la même loi (celle de e^{tX}) donc $\forall i$, $\mathbf{E}(e^{tX_i}) = \mathbf{E}(e^{tX})$ et finalement

$$\mathbf{E}(e^{ntS_n}) = \mathbf{E}(e^{tX_1}...e^{tX_n}) = \mathbf{E}(e^{tX})...\mathbf{E}(e^{tX}) = (\mathbf{E}(e^{tX}))^n.$$

En combinant avec $(*)$ on trouve le résultat demandé.

Q 35. La fonction $x \mapsto a^x = e^{x\ln(a)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \ln(a).e^{x\ln(a)} = \ln(a).a^x$. On obtient alors g_a par ajout d'une fonction affine, elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. La fonction g_a est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a'(x) = \frac{-1}{2}a^{-1} + \frac{1}{2}a - \ln(a)a^x$$

On peut redériver (justification donnée plus haut) et écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_a''(x) = -[\ln(a)]^2 a^x < 0,$$

donc affirmer que g_a' est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}$.

On constate comme annoncé par l'énoncé que $g_a(-1) = 1.a^{-1} - a^{-1} = 0$ et que $g_a(1) = 1.a - a^1 = 0$ ($-g_a$ correspond à la fonction $x \mapsto a^x$ à laquelle on a enlevé la fonction affine passant par ses points d'abscisses -1 et 1).
Les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées, on en déduit l'existence d'un point $c \in]-1, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.
Puisque g_a' est décroissante, on en déduit $g_a' \leq 0$ (donc g_a décroissante) sur $[c, +\infty[$ et $g_a' \geq 0$ (donc g_a croissante) sur $[c, +\infty[$.
Notamment, soit $x \in [-1, 1]$ (on distingue deux cas, selon x inférieur ou supérieur à c) :

- La fonction g_a est croissante sur $[-1, c]$ donc si $x \in [-1, c]$, on a $g_a(x) \geq g_a(-1) = 0$.
- La fonction g_a est décroissante sur $[c, 1]$ donc si $x \in [c, 1]$, on a $g_a(x) \geq g_a(1) = 0$.

Le résultat est ainsi démontré.

Q 36. On choisit $a = e^t > 1$ (au passage, l'hypothèse $a > 0$ aurait suffi à la question précédente) donc par Q35,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad g_{e^t}(x) = \frac{1-x}{2}\underbrace{(e^t)^{-1}}_{=e^{-t}} + \frac{1+x}{2}e^t - \underbrace{(e^t)^x}_{=e^{tx}} \geq 0$$

Le résultat demandé en découle instantanément.

Q 37. La variable aléatoire X est à valeurs dans $[-1, 1]$ donc par Q36 (et pour tout $t > 0$)

$$e^{tX} \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t$$

Nous avons prouvé que e^{tX} et X possèdent une espérance (et la v.a. constante égale à 1 en possède aussi une), donc par linéarité le 2nd membre de l'inégalité admet une espérance, et finalement par croissance puis linéarité, nous pouvons écrire (toujours pour tout $t > 0$)

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leq \mathbf{E}\left[\frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t\right] = \frac{\mathbf{E}(1) - \mathbf{E}(X)}{2}e^{-t} + \frac{\mathbf{E}(1) + \mathbf{E}(X)}{2}e^t$$

Naturellement, $\mathbf{E}(1) = 1$... et on a depuis Q32 l'hypothèse X centrée, i.e. $\mathbf{E}(X) = 0$, donc

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leq \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t = \mathrm{ch}(t).$$

Q 38. Il y a t^{2k} dans chaque terme, comparons donc $(2k)!$ et $2^k.k!$.
Montrons par récurrence sur k que $\dfrac{(2k)!}{2^k k!} \geq 1$.

- Pour $k = 0$, on a $\dfrac{(2k)!}{2^k k!} = \dfrac{0!}{2^0 0!} = 1$, d'où l'initialisation.

- Si le résultat est vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}$, alors
$$\frac{(2(k+1))!}{2^{k+1}(k+1)!} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \cdot \frac{(2k+2)(2k+1)}{2(k+1)} = \underbrace{\frac{(2k)!}{2^k k!}}_{\geq 1} \cdot \underbrace{(2k+2)}_{\geq 1} \geq 1,$$

  d'où l'hérédité.

La propriété est ainsi vraie pour tout k.
On en déduit immédiatement que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(2k)!} \leq \frac{1}{2^k k!}$, d'où l'inégalité demandée en multipliant par $t^{2k} \geq 0$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$).

On reconnaît les termes généraux de séries entières qui CV pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc en sommant ces inégalités on trouve $\forall t \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^k}{k!},$$
et on reconnaît
$$\mathrm{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$$
(pour le 2nd membre, on peut partir de $e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ et identifier z à $t^2/2$)

Puisque par Q37 on a (pour tout $t > 0$) $\mathbf{E}(e^{tX}) \leq \mathrm{ch}(t)$ et que $\mathrm{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$ pour tout t, on en déduit immédiatement le résultat :
$$\forall t > 0, \quad \mathbf{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$$

Q 39. La fonction *exp* étant strictement croissante, on peut affirmer que $t \mapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ admet un minimum ssi $t \mapsto -nt\varepsilon + nt^2/2$ admet un minimum.
L'étude est extrêmement simple (on peut aussi reconnaître un trinôme du 2nd degré !), le minimum est atteint en $t = \varepsilon$.
REM : Si on note $\rho(t) = e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$, on peut donc écrire $\forall t \in \mathbb{R}$, $\rho(t) \geq \rho(\varepsilon) = e^{-n\varepsilon^2/2}$

Q 40. En combinant Q34 et Q38 on peut écrire $\forall t > 0$,
$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq \frac{[\mathbf{E}(e^{tX})]^n}{e^{tn\varepsilon}} \leq [e^{t^2/2}]^n e^{tn\varepsilon} = e^{nt^2/2 - nt\varepsilon}.$$

On reconnaît la fonction ρ étudiée Q39.
En se rappelant que le résultat ci-dessus est valable pour tout $t > 0$, on prend la valeur de t qui minimise la fonction ρ, c'est-à-dire que l'on spécialise le résultat en $t = \varepsilon > 0$ et on obtient
$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{n\varepsilon^2/2 - n\varepsilon^2} = e^{-n\varepsilon^2/2},$$

CQFD.

Si l'on remplaçait les X_i par $-X_i$ et donc S_n par $-S_n$, toutes les hypothèses (notamment X à valeurs dans $[-1, 1]$ et X centrée) resteraient respectées.
On en déduit que l'on a aussi
$$\mathbf{P}(S_n \leq -\varepsilon) = \mathbf{P}(-S_n \geq \varepsilon) \leq e^{n\varepsilon^2/2 - n\varepsilon^2} = e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Or l'événement $(|S_n| \geq \varepsilon)$ est l'union disjointe de $(S_n \leq -\varepsilon)$ et de $(S_n \geq \varepsilon)$, donc
$$\mathbf{P}(|S_n \geq \varepsilon|) = \mathbf{P}(S_n \leq -\varepsilon) + \mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Q 41. Le remplacement du $\geq$ par $>$ est peut-être une faute de frappe (non, à la lecture de Q34). En tout cas, $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq \mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$...
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \mathbf{P}(|S_n \geq \varepsilon|) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2} = 2(e^{-\varepsilon^2/2})^n$.
La série $\sum_{n \geq 0} 2(e^{-\varepsilon^2/2})^n$ converge (série géométrique, de raison $e^{-\varepsilon^2/2} \in]0, 1[$) donc par comparaison pour séries de termes généraux positifs, la série de terme général $\mathbf{P}(|S_n \geq \varepsilon|)$ converge.

Q 42. Notons pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A_m = \{\omega \in \Omega \ ; \ |S_m(\omega)| > \varepsilon\}$, que l'on peut aussi noter $A_m = (|S_m| > \varepsilon)$.
On a $\forall m \in \mathbb{N}$, A_m est un événement (si l'on préfère, B_m est un élément de $\mathcal{A}$, la tribu).
Ainsi, $B_n = \displaystyle\bigcup_{m \geq n} A_m$ est une intersection d'événements, donc est un événement.

On pourrait utiliser la propriété de continuité décroissante, mais ici on peut s'en passer.
L'union définissant B_m n'est pas disjointe, on peut tout-de-même écrire l'encadrement :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad 0 \leq \mathbf{P}(B_n) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon).$$

Le troisième membre est le RESTE (d'ordre $n-1$) d'une série convergente (cf Q41), donc $\displaystyle\sum_{m=n}^{+\infty} \mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Par théorème d'encadrement, on en déduit que $\mathbf{P}(B_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, CQFD.

Q 43. On peut écrire (pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\Omega_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{m \geq n} (|S_m| \leq \frac{1}{k}) \right)$$

Il s'agit d'une union dénombrable d'intersection dénombrables d'événements, donc d'un événement.
On peut aussi noter que $\displaystyle\bigcap_{m \geq n} (|S_m| \leq \frac{1}{k}) = \overline{\bigcup_{m \geq n} (|S_m| > \frac{1}{k})} = \overline{B_n}$ en prenant $\varepsilon = 1/k$ dans la définition de B_m dans Q42 (je note $\overline{C} = \Omega \setminus C$ pour tout événement C)

On a donc $\Omega_k = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{B_{n,1/k}}$ est une union dénombrable d'événements.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Rappelons que la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ est

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n \in \mathbb{N}^* \ : \ \forall m \in \mathbb{N}, \ m \geq n \ \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon.$$

On peut remplacer $\varepsilon > 0$ par une suite de réels > 0 de limite nulle par exemple $\varepsilon = 1/k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire que la définition équivaut à

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \exists n \in \mathbb{N}^* \ : \ \forall m \in \mathbb{N}, \ m \geq n \ \Rightarrow |u_n| \leq \frac{1}{k}.$$

Cela signifie tout simplement que $A = \displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$, donc A est un événement en tant qu'intersection dénombrable d'événements.

Q 44. Ici il faut utiliser la propriété de continuité décroissante.
Il est évident que la suite $(\Omega_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante au sens de l'inclusion, et comme $A = \displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Omega_k$ on a

$$\mathbf{P}(A) = \lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(\Omega_k).$$

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}^*$ et considérons $\varepsilon = 1/k$. La suite (B_n) construite Q42 est clairement décroissante ($B_n = B_{n+1} \cup (|S_n| > \varepsilon)$) donc la suite $(\overline{B_n})$ est croissante.
Comme $\Omega_k = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{B_n}$, on a cette fois par continuité croissante

$$\mathbf{P}(\Omega_k) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(\overline{B_n}).$$

Puisque $\mathbf{P}(B_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ d'après Q42, on en déduit que $\mathbf{P}(\overline{B_n}) = 1 - \mathbf{P}(B_n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

Ainsi, on a $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ $\mathbf{P}(\Omega_k) = 1$ et donc d'après le "rappel" du début de la question,

$$\mathbf{P}(A) = \lim_{k\to+\infty} \mathbf{P}(\Omega_k) = 1,$$

CQFD.