

## PROBLÈME 2

### Notations et définitions

- $\mathbf{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbf{R}$  désigne celui des nombres réels.
- Si  $X$  est une variable aléatoire admettant une espérance, on note  $\mathbf{E}(X)$  son espérance.

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  un espace probabilisé. Soit  $X$  une variable aléatoire discrète sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , à valeurs dans  $[-1, 1]$ . On considère dans ce problème une suite  $(X_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$  de variables aléatoires *discrètes* sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , *mutuellement indépendantes et de même loi que  $X$* . Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

### Objectif

Montrer que si la variable aléatoire  $X$  est centrée ( $\mathbf{E}(X) = 0$ ), alors la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  converge presque-sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

**Q31.** On ne suppose pas  $X$  centrée dans cette question. Montrer que  $X$  admet une espérance.

On suppose désormais que  $X$  est *centrée*.

**Q32.** Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie  $Y$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ . Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque  $Y$  est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

**Q33.** En déduire que pour tout  $\alpha > 0$  :

$$\mathbf{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{\alpha}.$$

**Q34.** Montrer que pour tout  $t > 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on a :

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{(\mathbf{E}(e^{tX}))^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

### Majoration de $\mathbf{E}(e^{tX})$

**Q35.** Soit  $a > 1$ . On considère la fonction  $g_a$  définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction  $g_a$  est dérivable sur  $\mathbf{R}$  et que la fonction  $g'_a$  est décroissante sur  $\mathbf{R}$ .  
En déduire, en remarquant que  $g_a(-1) = g_a(1) = 0$ , que pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $g_a(x) \geq 0$ .

**Q36.** En déduire que pour tout  $t > 0$  et pour tout  $x \in [-1, 1]$  on a :

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.$$

**Q37.** En déduire que pour tout  $t > 0$  :

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leq \text{ch}(t).$$

**Q38.** Montrer que pour tout entier  $k \in \mathbf{N}$  et tout  $t \in \mathbf{R}$ , on a :

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!} \left( \frac{t^2}{2} \right)^k.$$

En déduire que pour tout  $t > 0$ , on a :

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

### Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier  $n \in \mathbf{N}^*$  et un réel  $\varepsilon > 0$ .

**Q39.** Montrer que la fonction

$$t \in \mathbf{R} \mapsto e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$$

atteint un minimum en un point que l'on précisera.

**Q40.** En déduire que  $\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$ , puis que :

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

## Conclusion

**Q41.** Montrer que pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , la série de terme général  $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$  converge.

**Q42.** On fixe un réel  $\varepsilon > 0$ . On note, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$  :

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega ; |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $B_n$  est un événement et que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n\right) = 0.$$

**Q43.** Posons, pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$  :

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega ; \exists n \in \mathbf{N}^*, \forall m \geq n, |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Montrer que pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ ,  $\Omega_k$  est un événement.

Écrire l'ensemble  $A = \left\{ \omega \in \Omega ; \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\omega) = 0 \right\}$  à l'aide des événements  $\Omega_k$ ,  $k \in \mathbf{N}^*$ .

En déduire que  $A$  est un événement.

**Q44.** Déduire des questions précédentes que :

$$\mathbf{P}(A) = 1.$$

# FIN