EXERCICE
Étude d'extremums

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence d'extremums pour f.

Q1. Déterminer les points critiques de f.

Q2. Expliciter des points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$, tels que $f(x, y) < 0$.
Expliciter de même des points $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$, tels que $f(x, y) > 0$.
La fonction f admet-elle en $(0, 0)$ un maximum local, un minimum local ou aucun des deux ?

On considère la fonction g définie sur $\mathbf{R}^2$ par : $\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2,\ g(u, v) = f(1 + u, 1 + v) - f(1, 1)$.

Q3. Calculer, pour tout $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, $g(u, v)$ puis, pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, $g(r \cos\theta, r \sin\theta)$.

Q4. Prouver que pour tout $(r, \theta) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, on a : $g(r \cos\theta, r \sin\theta) \geq 3r^2 \left(\frac{1}{2} - 2r\right)$.
Que peut-on en conclure ?

Q5. La fonction f possède-t'elle un ou des extremums globaux ?