DS9 du 29/03/2025

Sujet B (MPI)

Ex I : File d'attente

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0, la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$ il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.

On suppose que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé a pour indice $n = 1$, etc.

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la fonction notée G_X définie par :

$$G_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = j)t^j.$$

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

Q1. On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1.
Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$.

Q2. On note A l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».
Exprimer A en fonction des événements $\{T_1 = k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbf{P}(A)$. Interpréter.

Q3. Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice de T_1, puis calculer sa somme.

Q4. En déduire l'espérance et la variance de T_1.

Q5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n-1$ et le client d'indice n. On admet que les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi.
On note $D_n = T_1 + \ldots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.
Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice G_{D_n} de D_n.

Q6. Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de $x = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
En déduire le développement en série entière de G_{D_n} en 0 et montrer que pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbf{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ \binom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II - Étude du comportement de la file

II.1 - Une suite récurrente

Soient $a > 0$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(a(x-1)) \end{cases}$.

On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$z_1 \in]0,1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = f(z_n).$$

Q7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in]0,1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.

Q8. En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.

Q9. Soit la fonction $\psi : \begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - a(x-1) \end{cases}$.
Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leqslant \psi(x) \Leftrightarrow f(x) \leqslant x$ et $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

Q10. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$. En déduire que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Q11. On suppose dans cette question que $a > 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in]0,1[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.
En distinguant les cas $z_1 \in]0,\alpha]$ et $z_1 \in]\alpha,1[$, montrer que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

II.2 - Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, le service a une durée k avec la probabilité $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0.

On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client : comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0. Les variables S et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont supposées indépendantes.

On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi.
Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe étaient servis.

Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du k-ième groupe.

Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $\{V_k = 0\}$ est réalisé pour tout $k \geqslant n$.

Q12. Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{V_n = 0\}$?

Q13. Quelle est la loi du nombre N_n de clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1, n]\!]$?

Q14. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbf{P}(V_1 = k | S = n)$.
En déduire que V_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Q15. On note $z_n = \mathbf{P}(V_n = 0)$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\mathbf{P}(Z) = \lim_{n\to+\infty} z_n$.

Q16. Justifier que pour tout $(j, n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(V_{n+1} = 0 | V_1 = j) = \mathbf{P}(V_n = 0)^j$. On distinguera le cas $j = 0$.

Q17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} = \exp(\lambda p(z_n - 1))$.

Q18. Déterminer, suivant les valeurs de λp, la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter.

Ex II

Fonctions harmoniques et problème de Dirichlet

Ce problème étudie quelques propriétés des fonctions harmoniques ainsi que quelques exemples de telles fonctions (parties I et II). Dans la partie III, largement indépendante du reste du problème, on montre le principe du maximum faible pour le laplacien. Dans la partie IV, on établit un lien entre les fonctions harmoniques de deux variables et les fonctions développables en série entière, et on propose la résolution du problème de Dirichlet dans le disque unité de $\mathbb{R}^2$ dans la partie V.

Notations

— Dans ce préambule et dans les parties I et III, n désigne un entier strictement positif.

— On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

— Si U est une partie de $\mathbb{R}^n$, alors $\overline{U}$ désigne son adhérence et ∂U sa frontière.

— Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, on désigne par $D(a, R)$ la boule ouverte de centre a et de rayon R pour la distance euclidienne. Autrement dit

$$D(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ \|x - a\| < R\}$$

La boule fermée de centre a et de rayon R est alors $\overline{D(a,R)}$.

— L'opérateur différentiel Δ (appelé laplacien) est défini pour toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ par

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in U, \quad \Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)$$

— Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite harmonique sur U si

$$\forall x \in U \quad \Delta f(x) = 0$$

L'ensemble des fonctions harmoniques sur U est noté $\mathcal{H}(U)$.

I Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$.

Q 1. Montrer que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.

Q 2. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Montrer que si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur U, alors toute dérivée partielle à tout ordre de f appartient à $\mathcal{H}(U)$.

Q 3. On suppose dans cette question que U est connexe par arcs. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{H}(U)$ telles que f^2 appartienne aussi à $\mathcal{H}(U)$.

Q 4. Donner une fonction non constante appartenant à $\mathcal{H}(U)$. Le produit de deux fonctions harmoniques est-il une fonction harmonique ?

II Exemples de fonctions harmoniques

II.A – On cherche dans cette question à déterminer les fonctions harmoniques non nulles sur $\mathbb{R}^2$ à variables séparables, c'est-à-dire les fonctions f s'écrivant sous la forme $f(x, y) = u(x)v(y)$.

On se donne donc deux fonctions u et v, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulles, et on pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = u(x)v(y)$$

On suppose que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Q 5. Montrer qu'il existe une constante λ réelle telle que u et v soient solutions respectives des équations

$$z'' + \lambda z = 0 \qquad \text{et} \qquad z'' - \lambda z = 0$$

Q 6. Donner en fonction du signe de λ la forme des fonctions harmoniques à variables séparables.

II.B – Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On pose, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Q 7. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$.

Q 8. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

Q 9. Exprimer également $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f en $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

Q 10. Montrer que f appartient à $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ si et seulement si, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$$

Q 11. Déterminer les fonctions harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, c'est-à-dire les fonctions f appartenant à $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ telles que $(r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ soit indépendante de θ.

Q 12. Soient a, b, r_1 et r_2 quatre réels tels que $0 < r_1 < r_2$. Déterminer une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telle que

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ f(x,y) = a & \text{si } \|(x,y)\| = r_1 \\ f(x,y) = b & \text{si } \|(x,y)\| = r_2 \end{cases}$$

II.C – Dans cette sous-partie II.C, on considère deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, $u : \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on pose

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \qquad f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = u(r)v(\theta)$$

La fonction f est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dite à variables polaires séparables.

Q 13. Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors v est 2π-périodique.

Q 14. Montrer que, si f est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors il existe un réel λ tel que u soit solution de l'équation différentielle (II.1)

$$r^2 z''(r) + rz'(r) - \lambda z(r) = 0 \tag{II.1}$$

et v soit solution de l'équation différentielle (II.2)

$$z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0 \tag{II.2}$$

II.C.1) On suppose ici que $\lambda = 0$.

Q 15. Quelles sont les solutions 2π-périodiques de (II.2) ?

Q 16. Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q 17. En déduire, dans le cas $\lambda = 0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables.

II.C.2) On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

Q 18. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (II.2) admette des solutions 2π-périodiques non nulles. Donner ces solutions.

Q 19. Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On pourra considérer, en justifiant son existence, une fonction Z de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $r > 0$, $z(r) = Z(\ln(r))$.

Q 20. Quelles sont les solutions se prolongeant par continuité en 0 ?