# Corrigé du DS09 du 20/01/2026 (3h)
# Sujet A (MPI*)

## Partie symétrique et antisymétrique d'une matrice

### Partie I : Résultats préliminaires

**Q 1)** Si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors

$$tr(S^T A) = tr(SA) = tr((SA)^T) = tr(A^T S^T) = tr(-AS) = -tr(AS) = -tr(SA) = -tr(S^T A),$$

donc $tr(S^T A) = 0$, ce qui montre que les SEV $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux (donc en particulier en somme directe). De plus,

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = Vect((E_{i,i})_{1\leq i\leq n}, (E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}),$$

donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = n + \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$, ainsi que

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = Vect((E_{i,j} - E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}),$$

donc $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, et

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$

Finalement, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus^\perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Q 2)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les matrices $A_s = \frac{1}{2}(A + A^T)$ et $A_a = \frac{1}{2}(A - A^T)$ forment la décomposition de $A$ sur la somme directe $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus^\perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, d'après le théorème de projection orthogonale sur le SEV $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ :

$$\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \qquad \|A - A_s\|_2 = \|A - p_F(A)\|_2 = d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \leq \|A - S\|_2.$$

On a égalité si et seulement si $S = p_F(A) = A_s$ (puisque la distance n'est atteinte qu'en un point : le projeté orthogonal).

**Q 3)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$X^T AX = \sum_{i=1}^n x_i \,(AX)_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{i,j} x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i + \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_{i,j} + a_{j,i}) x_i x_j.$$

Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on $a_{i,i} = 0$ pour tout $i$, ainsi que $a_{i,j} + a_{j,i} = 0$ pour tout $i < j$. Donc pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^T AX = 0$.

Réciproquement, si $X^T AX = 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, alors en évaluant la formule précédente en $X = e_i$ (le $i^e$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$), on obtient $a_{i,i} = 0$ pour tout $i$. Et en évaluant en $X = e_i + e_j$ (pour $i < j$), on obtient $a_{i,j} + a_{j,i} = 0$. Donc $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (puisque $A^T = -A$).

On a donc bien l'équivalence voulue.

**Q 4)** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Il existe $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$, donc en notant $\overline{X}$ le vecteur conjugué de $X$, on a

$$\overline{X}^T AX = \overline{X}^T \lambda X = \lambda \overline{X}^T X = \lambda \sum_{i=1}^n \overline{x_i} x_i = \lambda \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \lambda \|X\|_2^2.$$

Puisque $A^T = -A$ et $\overline{A} = A$, on a en outre :

$$\overline{X}^T AX = -\overline{X}^T A^T X = -(A\overline{X})^T X = -(\overline{AX})^T X = -\overline{(\lambda X)}^T X = -\overline{\lambda}\, \overline{X}^T X = -\overline{\lambda} \|X\|_2^2,$$

donc $\lambda \|X\|_2^2 = -\overline{\lambda} \|X\|_2^2$, ce qui entraîne (puisque $X$ est non nul), $\overline{\lambda} = -\lambda$. On a montré que les valeurs propres complexes d'une matrice antisymétrique réelle sont nécessairement imaginaires pures.

**Q 5)** Voir le CH.13 (théorème de caractérisation spectrale de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).

**Q 6)** $(a)$ Soit $\lambda$ une valeur propre réelle de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En décomposant $A = A_s + A_a$, on obtient pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ :

$$X^T AX = X^T A_s X + \underbrace{X^T A_a X}_{=0} = X^T A_s X.$$

Or, $A_s$ est réelle symétrique, donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$, notée $(V_1, \cdots, V_n)$. En notant $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées, on a donc, pour tout $X = \sum_{i=1}^n x_i V_i \in \mathbb{R}^n$ :

$$X^T AX = (X|A_s X) = \left( \sum_{i=1}^n x_i V_i \mid \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j V_j \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

(où $(.|.)$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$). Puisque $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, on en déduit les inégalités :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \qquad \min sp_{\mathbb{R}}(A_s)\|X\|^2 \leq X^T AX \leq \max sp_{\mathbb{R}}(A_s)\|X\|^2.$$

Si on choisit $X$ comme vecteur propre de $A$ associé à $\lambda$, alors $X^T AX = \lambda X^T X = \lambda\|X\|^2$ donc

$$\min sp_{\mathbb{R}}(A_s)\|X\|^2 \leq \lambda\|X\|^2 \leq \max sp_{\mathbb{R}}(A_s)\|X\|^2,$$

et en divisant par $\|X\|^2 > 0$ ($X$ étant non nul), on obtient :

$$\min sp_{\mathbb{R}}(A_s) \leq \lambda \leq \max sp_{\mathbb{R}}(A_s).$$

$(b)$ Si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de $A_s$ sont strictement positives, donc d'après l'inégalité de la question précédente, toute valeur propre réelle de $A$ est strictement positive. Ainsi, 0 n'est pas valeur propre de $A$, donc $A$ est inversible.

**Q 7)** On suppose que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

$(a)$ Exercice classique (mais l'unicité de la racine carrée $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est difficile), voir TD13.

$(b)$ Puisque $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $A_s$ est inversible (valeurs propres dans $]0, +\infty[$, donc non nulles), donc en factorisant par $A_s$ :

$$A = A_s + A_a = A_s(I_n + A_s^{-1}A_a),$$

donc $\det(A) = \det(A_s)\det(I_n + A_s^{-1}A_a)$, mais $A_s^{-1}A_a$ n'est pas antisymétrique en général. L'idée est de remplacer $A_s^{-1}A_a$ par une matrice antisymétrique qui lui est semblable, ce qui ne changera pas le déterminant. Pour cela, on utilise la racine carrée de la question précédente :

$$A_s^{-1}A_a = (B^2)^{-1}A_a,$$

donc puisque $B$ est inversible (car dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$), on peut poser

$$Q = B(A_s^{-1}A_a)B^{-1} = B(B^{-1}B^{-1}A_a)B^{-1} = B^{-1}A_a B^{-1},$$

et cette matrice est antisymétrique car :

$$Q^T = (B^{-1})^T A_a^T (B^{-1})^T = (B^T)^{-1}(-A_a)(B^T)^{-1} = -B^{-1}A_a B^{-1} = -Q.$$

On a finalement :

$$\det(A) = \det(A_s)\det(I_n + A_s^{-1}A_a) = \det(A_s)\det(B(I_n + A_s^{-1}A_a)B^{-1}) = \det(A_s)\det(I_n + Q),$$

avec $Q = B^{-1}A_a B^{-1} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

$(c)$ $Q$ étant antisymétrique réelle, ses valeurs propres sont imaginaires pures (cf. Q 4)), donc les valeurs propres complexes de $I_n + Q$ sont de la forme $1 + ix$ avec $x \in \mathbb{R}$. Vu que $Q$ est une matrice réelle, chaque valeur propre non réelle de $Q$ a la même multiplicité que sa conjuguée, donc en faisant le produit de toutes les valeurs propres complexes de $Q$, on obtient que $\det(I_n + Q)$ est le produit de facteurs valant 1 ou $(1 + ix)(1 - ix) = 1 + x^2$ avec $x \in \mathbb{R}^*$, donc $\det(I_n + Q) \geq 1$. On en déduit que $\det(A) \geq \det(A_s)$.

**Q 8)** On suppose $A$ inversible. Conformément à l'indication, on étudie la matrice :

$$M = A(A^{-1})_s A^T = \frac{1}{2}A(A^{-1} + (A^{-1})^T)A^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = A_s,$$

donc $\det(A_s) = \det(M) = \det(A)\det((A^{-1})_s)\det(A^T) = (\det(A))^2\det((A^{-1})_s)$.

**Q 9)** Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et soit $\lambda$ une valeur propre de $A_s$ (automatiquement réelle car $A_s \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$). En notant $X \neq 0$ un vecteur propre associé, on a $A_sX = \lambda X$ donc

$$X^TAX = X^TA_sX + \underbrace{X^TA_aX}_{=0} = X^TA_sX = \lambda X^TX = \lambda\|X\|^2.$$

Mais $X^TAX = (X|AX)$, donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|X^TAX| \leq \|X\|\|AX\| = \|X\|^2$$

(en effet, $A$ conserve la norme car c'est une matrice orthogonale). Finalement, on obtient

$$|\lambda|\|X\|^2 \leq \|X\|^2,$$

donc en divisant par $\|X\|^2 > 0$, il vient $|\lambda| \leq 1$, ce qui montre $\lambda \in [-1, 1]$.

**Q 10)** On connaît la forme des matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

(suivant que $\det(A)$ soit égal à 1 ou $-1$). La partie symétrique de $A$ vaut donc

$$A_s = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } A_s = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Dans le premier cas, on obtient une homothétie et dans le second cas, on obtient une symétrie orthogonale (car matrice orthogonale et symétrique). En prenant donc $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ qui n'est ni une homothétie ni une symétrie orthogonale, par exemple $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a donc bien $sp_{\mathbb{R}}(S) = \{0, 1\} \subset [-1, 1]$, mais il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $A_s = S$.

**Q 11)** Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(*a*) Supposons que $sp_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1, 1]$ et notons $(\cos(\theta_i))_{1\leq i\leq k}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 < \theta_i < \pi$ les éventuelles valeurs propres de $S$ dans $]-1, 1[$ ($k = 0$ correspond au cas où aucune des valeurs propres n'est dans $]-1, 1[$), dont les SEP associés sont de dimension paire par hypothèse. Par le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}SP = D$ est diagonale, avec comme éléments diagonaux des 1, des $-1$, et chaque $\cos(\theta_i)$ qui apparaît un nombre pair de fois (noté $2a_i$ avec $a_i \in \mathbb{N}$), pour $i \in [\![1, k]\!]$ :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \cos(\theta_1) & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}.$$

Chaque bloc $\begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$ est la partie symétrique de la matrice orthogonale

$R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$, donc en posant

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & R_{\theta_1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix} P^T,$$

où chaque bloc $R_{\theta_i}$ apparaît $a_i$ fois, on a bien $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (car produit de matrices orthogonales) et $A_s = PDP^T = PDP^{-1} = S$.

$(b)$ Réciproquement, on suppose que $S$ est la partie symétrique de $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
D'après Q 9), on a d'abord $sp_{\mathbb{R}}(S) = sp_{\mathbb{R}}(A_s) \subset [-1, 1]$.
Ensuite, par le théorème de réduction des isométries en base orthonormée, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale par blocs, avec blocs diagonaux de la forme

$$(1), \quad (-1), \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \theta \neq 0 \ [\pi].$$

On en déduit

$$S = A_s = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2} P \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & (R_{\theta_1})_s & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & (R_{\theta_k})_s \end{pmatrix} P^T,$$

c'est-à-dire

$$S = P \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \cos(\theta_1) & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \cos(\theta_k) \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec chaque $\cos(\theta_i)$ qui apparaît un nombre pair de fois (deux fois pour chaque bloc). Cette orthodiagonalisation de $S$ montre bien que chaque valeur propre $\cos(\theta_i) \in ]-1, 1[$ est de multiplicité paire, donc le SEP associé est de dimension paire (puisque $S$ est diagonalisable, les dimensions des SEP coïncident avec les multiplicités des valeurs propres).

**Partie II : Matrices $F$-singulières**

Si $F$ est un SEV non nul de $E_n$ (vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$), on dit qu'une matrice $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $F$-singulière lorsqu'il existe $X \in F$ non nul tel que $Z^T KX = (Z|KX) = 0$ pour tout $Z \in F$, c'est-à-dire $KX \in F^\perp$.

**Q 12)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le fait que $A$ soit $E_n$-singulière signifie qu'il existe $X \in E_n \setminus \{0\}$ tel que $AX \in E_n^\perp = \{0\}$, ou encore que $Ker(A)$ est non nul, ce qui équivaut à $A$ non inversible, c'est-à-dire $A$ singulière.

**Q 13)** Puisque $H$ est un hyperplan de $E_n$ (avec $n \geq 2$) et puisque $N \in H^\perp$ avec $N$ non nul (car $\|N\| = 1$), on a $H^\perp = Vect(N)$ (en effet, $H^\perp$ est de dimension 1 et contient $N$). Ainsi, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$A \text{ est } H\text{-singulière} \iff \exists X \in H \setminus \{0\},\ AX \in H^\perp = Vect(N)$$

$$\iff \exists X \in H \setminus \{0\},\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ AX = \lambda N.$$

**Q 14)** Le noyau de la matrice $A_N = \begin{pmatrix} A & N \\ N^T & 0 \end{pmatrix}$ est formé des colonnes $Y = \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} \in E_{n+1}$ (avec $X \in E_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$) telles que $A_N Y = 0_{E_{n+1}}$, c'est-à-dire $AX + \alpha N = 0_{E_n}$ et $N^T X = (N|X) = 0_\mathbb{R}$. Ces conditions sont équivalentes à $X \in \{N\}^\perp = H$ et $AX = -\alpha N$, et on a $X = 0_{E_n} \implies \alpha = 0$ (puisque $N$ est non nul). Donc $Y \neq 0 \iff X \neq 0$ dans ce système. En combinant ceci avec la question précédente, on en déduit

$$A \text{ est } H\text{-singulière} \iff \exists X \in H \setminus \{0\},\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ AX = \lambda N$$

$$\iff \exists X \in H \setminus \{0\},\ \exists \alpha \in \mathbb{R},\ AX = -\alpha N$$

$$\iff \exists Y \in E_{n+1} \setminus \{0\},\ A_N Y = 0$$

$$\iff Ker(A_N) \neq \{0\} \iff A_N \text{ est singulière.}$$

**Q 15)** En effectuant un produit par blocs, on constate que la matrice $B = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie bien

$$A_N B = \begin{pmatrix} A & N \\ N^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^T A^{-1} & -N^T A^{-1} N \end{pmatrix}.$$

**Q 16)** Par multiplicativité du déterminant et formule du déterminant par blocs, la question précédente amène :

$$\det(A_N)\det(B) = \det(A_N B) = \det(I_n)\det(-N^T A^{-1} N) = \det(-N^T A^{-1} N).$$

En outre, $\det(B) = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$, et $-N^T A^{-1} N$ est une matrice $1 \times 1$ (qu'on peut identifier à un réel), donc

$$\frac{\det(A_N)}{\det(A)} = -N^T A^{-1} N.$$

On en déduit le résultat en multipliant par $\det(A)$ :

$$\det(A_N) = -N^T A^{-1} N \det(A).$$

**Q 17)** Si $\det((A^{-1})_s) = 0$, alors $(A^{-1})_s$ est non inversible donc $\exists N \in E_n \setminus \{0\}$ (qu'on peut choisir de norme 1) tel que $(A^{-1})_s N = 0$. On en déduit :

$$N^T A^{-1} N = N^T \underbrace{((A^{-1})_s)N}_{=0} + \underbrace{N^T((A^{-1})_a)N}_{=0} = 0,$$

donc $\det(A_N) = 0$ d'après la question précédente, ce qui montre que $A$ est $H$-singulière d'après **Q 14)**, en notant $H$ l'hyperplan $\{N\}^\perp$.

**Q 18)** Si $\det(A_s) = 0$, alors d'après **Q 8)**, $\det((A^{-1})_s) = 0$ (puisque $\det(A)$ est non nul par hypothèse), donc d'après la question précédente, il existe un hyperplan $H$ tel que $A$ est $H$-singulière.

**Q 19)** Si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, considérons $H = \{N\}^\perp$ un hyperplan quelconque de $E_n$ avec $\|N\| = 1$ et montrons que la matrice $A_N = \begin{pmatrix} A & N \\ N^T & 0 \end{pmatrix}$ est inversible en examinant son noyau.

Pour tout vecteur colonne $Y = \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} \in E_{n+1}$ (avec $X \in E_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$), on a

$$A_N Y = 0 \iff \begin{cases} AX + \alpha N = 0 \\ N^T X = 0 \end{cases} \implies X^T(AX + \alpha N) = 0$$

$$\implies X^T AX + \alpha \underbrace{(N^T X)^T}_{=0} = 0 \underset{X^T A_a X = 0}{\implies} X^T A_s X = 0 \implies X = 0$$

(puisque $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).
Ainsi, ($A_N Y = 0 \implies Y = 0$), puisque $X = 0$ entraîne $\alpha N = -AX = 0$ et $N$ est non nul.
On a montré que $A_N$ est inversible, donc d'après **Q 14)**, la matrice $A$ est $H$-régulière, et ce pour tout hyperplan $H$.

**Q 20)** Pour tout réel $\mu$, on a $\det(A(\mu)) = \begin{vmatrix} 2-\mu & -1 & \mu \\ -1 & 2-\mu & \mu - 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = 1 \neq 0$ donc $A(\mu)$ est inversible.

**Q 21)** Pour tout réel $\mu$, on a

$$(A(\mu))_s = \frac{1}{2}(A(\mu) + A(\mu)^T) = \begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & \mu/2 \\ -1 & 2-\mu & \mu/2 - 1 \\ \mu/2 & \mu/2 - 1 & 1 \end{pmatrix},$$

donc $\det((A(\mu))_s) = \cdots = \frac{1}{2}(\mu - 1)(\mu^2 - 2\mu - 2)$ et en calculant les racines, on en déduit que

$$(A(\mu))_s \text{ est singulière} \iff \det((A(\mu))_s) = 0 \iff \mu \in \{1, 1 \pm \sqrt{3}\}.$$

**Q 22)** Soit $N = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire de $E_3$ et soit $H$ l'hyperplan $\{N\}^\perp$. D'après **Q 14)**, la matrice $A(1)$ est $H$-singulière si et seulement si la matrice

$$A_N = \begin{pmatrix} A(1) & N \\ N^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & x \\ -1 & 1 & 0 & y \\ 0 & -1 & 1 & z \\ x & y & z & 0 \end{pmatrix}$$

est singulière, ce qui équivaut après calcul du déterminant à

$$x^2 + xy + y^2 = 0$$

ou encore à $x = y = 0$ puisque $x^2 + xy + y^2 = (x + y/2)^2 + (3/4)y^2$ (somme de carrés). Donc le vecteur $N = (0, 0, 1)$ convient, ce qui montre que l'hyperplan $H = \{(0, 0, 1)\}^\perp = \{z = 0\}$ convient.

**Q 23)**
**Q 24)**
**Q 25)**
**Q 26)**
**Q 27)**
**Q 28)**
**Q 29)**
**Q 30)**
**Q 31)**
**Q 32)**

**Q 33)**

**Q 34)**

**Q 35)**

**Q 36)**

**Q 37)**

* * *