DS09 du 20/01/2026 (3h)
Sujet A (MPI*)

Le sujet se compose d'un problème.
Calculatrice interdite.

Notations

Si n et p sont des entiers naturels non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et p colonnes et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. On définit de façon analogue $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
La transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est notée $A^\top$. On rappelle qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si $A^\top = A$ et qu'elle est dite antisymétrique si $A^\top = -A$.
Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices antisymétriques est noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Le groupe des matrices orthogonales à n lignes et n colonnes est noté $O_n(\mathbb{R})$.
On note I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$A_s = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) \text{ et } A_a = \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right).$$

Ainsi, A_s est une matrice symétrique, A_a est une matrice antisymétrique et $A = A_s + A_a$.
On dit que A_s est la partie symétrique de A et que A_a est sa partie antisymétrique.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ le spectre réel de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres réelles de A.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $X^\top MY$ appartient à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et on convient de l'identifier au nombre réel égal à son unique coefficient.
On rappelle qu'une matrice symétrique réelle est dite positive lorsque $X^\top AX \geq 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et elle est dite définie positive lorsque $X^\top AX > 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Objectif

L'objectif du problème est d'étudier certaines propriétés des matrices réelles carrées dont la partie symétrique est définie positive.

I. Résultats préliminaires

I.A - Distance de A à A_s

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique donné par $(M, N) \mapsto \mathrm{tr}(M^\top N)$ où tr désigne la trace. On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne associée.

Q 1) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser leurs dimensions.

Q 2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\|A - A_s\|_2 \leqslant \|A - S\|_2$.
Préciser à quelle condition sur $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, cette inégalité est une égalité.

I.B - Sur les matrices antisymétriques

Q 3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $X^\top AX = 0$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q 4) Montrer que les valeurs propres complexes de $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont nécessairement imaginaires pures.

I.C - Valeurs propres de A_s

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 5) Redémontrer que $A_s \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives, et que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives.

Q 6) (a) Pour toute valeur propre réelle λ de A, montrer que $\min \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A_s) \leqslant \lambda \leqslant \max \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(A_s)$.

(b) En déduire que si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors A est inversible.

Q 7) On suppose que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(a) Montrer qu'il existe une unique matrice B de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A_s$.

(b) Montrer qu'il existe une matrice Q de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(A) = \det(A_s)\det(I_n + Q)$.

(c) En déduire que $\det(A) \geqslant \det(A_s)$.

Q 8) On suppose A inversible et, conformément aux notations du problème, $(A^{-1})_s$ désigne la partie symétrique de l'inverse de A. Montrer que

$$(\det(A))^2 \det\left((A^{-1})_s\right) = \det(A_s).$$

Indication : on pourra considérer la matrice $A(A^{-1})_s A^\top$.

I.D - Partie symétrique des matrices orthogonales

Q 9) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs propres de A_s sont dans $[-1, 1]$.

Q 10) Donner un exemple de matrice symétrique S dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1, 1]$ et pour laquelle il n'existe pas de matrice $A \in O_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A_s = S$.

Q 11) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(a) On suppose que $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1, 1]$ et que pour toute valeur propre λ de S dans $]-1, 1[$, l'espace propre de S associé à λ est de dimension paire.
Montrer qu'il existe $A \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A_s = S$.

(b) Réciproquement, montrer que s'il existe $A \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A_s = S$, alors $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1, 1]$ et pour toute valeur propre λ de S dans $]-1, 1[$, l'espace propre de S associé à λ est de dimension paire.

II. Matrices $F-$singulières

Dans la suite de cette partie, on note $E_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'on munit du produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ défini par

$$\forall X, Y \in E_n,\ (X \mid Y) = X^\top Y.$$

On note $\|.\| : X \mapsto \sqrt{(X|X)}$ la norme euclidienne associée.
Si $1 \leqslant p \leqslant n$, on note $\mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang égal à p.
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite singulière si elle n'est pas inversible.
Si F est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de E_n et si $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que K est $F-$singulière lorsque

$$\exists X \in F \setminus \{0\},\ \forall Z \in F, \quad Z^\top K X = 0.$$

Dans le cas contraire, on dit que K est $F-$régulière.

II.A - Cas où F est un hyperplan

Q 12) Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est singulière si et seulement si elle est E_n-singulière.

Dans cette sous-partie II.A, on suppose désormais $n \geqslant 2$. Soit $F = H$ un hyperplan de E_n et soit $N \in E_n$ un vecteur unitaire normal à H (c'est-à-dire de norme 1 et orthogonal à tout vecteur de H).

Q 13) Montrer que A est $H-$singulière si et seulement s'il existe un vecteur non nul X de H et un réel λ tels que $AX = \lambda N$.

Q 14) En déduire que A est $H-$singulière si et seulement si la matrice $A_N = \begin{pmatrix} A & N \\ N^\top & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est singulière.

Dans les questions suivantes, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 15) Montrer qu'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), B_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $B_3 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $B_4 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ telle que :

$$A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^\top A^{-1} & -N^\top A^{-1} N \end{pmatrix}.$$

Q 16) En déduire que $\det(A_N) = -N^\top A^{-1} N \det(A)$.

Q 17) Montrer que si $\det\big((A^{-1})_s\big) = 0$, alors il existe un hyperplan H de E_n tel que A est $H-$singulière.

Q 18) En déduire que si $\det(A_s) = 0$, alors il existe un hyperplan H de E_n tel que A est $H-$singulière.

Q 19) On suppose que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que A est $H-$régulière pour tout hyperplan H de E_n.

II.B - Exemple

On traitera l'exemple

$$A = A(\mu) = \begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & \mu \\ -1 & 2-\mu & \mu - 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q 20) Montrer que $A(\mu)$ est inversible pour tout réel μ .

Q 21) Calculer $A(\mu)_s$ et montrer que $A(\mu)_s$ est singulière pour $\mu \in \{1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$.

Q 22) Déterminer un hyperplan H tel que $A(1)$ soit $H-$singulière.

II.C - Cas où F est de dimension $n-2$

On suppose ici $n \geqslant 3$. Soit F un sous-espace vectoriel de E_n de dimension $n-2$. On considère (N_1, N_2) une base de $F^\perp$ et on pose

$$N = (N_1 \quad N_2) \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R}).$$

Q 23) Montrer que A est $F-$singulière si et seulement s'il existe un élément non nul X de F et deux réels λ_1, λ_2 tels que $AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$.

Q 24) En déduire que A est $F-$singulière si et seulement si la matrice

$$A_N = \begin{pmatrix} A & N_1 & N_2 \\ {N_1}^\top & 0 & 0 \\ {N_2}^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & N \\ N^\top & 0_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$$

est singulière.

Dans les questions suivantes, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 25) Montrer qu'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ avec $B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), B_2 \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$, $B_3 \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$ et $B_4 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^\top A^{-1} & -N^\top A^{-1} N \end{pmatrix}.$$

Q 26) En déduire que $\det(A_N) = \det(N^\top A^{-1} N)\det(A)$.

Q 27) Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$ telle que $\det(P^\top A^{-1} P) = 0$ si et seulement s'il existe $P' \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$ telle que $\det({P'}^\top A P') = 0$.

Q 28) Montrer que si $N' = (N_1' \quad N_2')$ alors

$$\det({N'}^\top A N') = ({N_1'}^\top A_s N_1')({N_2'}^\top A_s N_2') - ({N_1'}^\top A_s N_2')^2 + ({N_1'}^\top A_a N_2')^2$$

Q 29) En déduire que si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\det(N^\top A^{-1} N) > 0$.

Q 30) En conclure que si $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors A est $F-$régulière pour tout sous-espace vectoriel F de dimension $n-2$ de E_n.

II.D - Exemple

On reprend l'exemple de la sous-partie II.B avec $\mu = 1$.

Q 31) Comment choisir $N' = (N'_1 \quad N'_2)$ de façon que $\det({N'}^\top A N') = 0$?

Q 32) Déterminer un sous-espace vectoriel F de E_3 tel que $\dim F = 1$ et tel que $A(1)$ soit $F-$singulière.

II.E - Cas général

Soit F un sous-espace vectoriel de E_n de dimension $n-p$, où $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

Q 33) Montrer que A est $F-$singulière si $\det({N'}^\top A N') = 0$ pour une matrice $N' \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ que l'on définira.

On suppose désormais que $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Q 34) Montrer que si $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est non nul alors $X^\top {N'}^\top A N' X > 0$.

Q 35) En déduire que les valeurs propres réelles de ${N'}^\top A N'$ sont strictement positives.

Q 36) En déduire que $\det({N'}^\top A N') > 0$.

Q 37) En déduire que A est $F-$régulière pour tout sous-espace vectoriel $F \neq \{0\}$ de E_n.

* * *