

Corrigé du DS08 du 06/01/2026 (3h)

Etude d'une série de fonctions (Mines-Ponts PC 2019 math 2)

Adaptation du corrigé de L. Carrot, professeur en PC*, lycée Fauriel (69)

I. Préliminaires

1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est définie et continue sur \mathbb{R} par opérations sur les fonctions usuelles.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| = \left| \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, donc $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$ (il y a même égalité car $f_n(\pi/(2n^2)) = 1/n^2$).
 - Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_\infty$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur \mathbb{R} .
 - Par suite, $R : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie et continue sur \mathbb{R} .
2. • $f : x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{x^2}$ est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .
 - $f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{x^2}{x^2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 1$, donc f est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0, 1]$.
 - Pour tout $x \geq 1$, $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$.
 - Or $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc, par comparaison, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
 - f est donc intégrable sur \mathbb{R}_+^* , donc, en particulier, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ converge.
3. Soit $g : (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(t)e^{ixt}$.
 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x, t) = f(t)e^{ixt}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R} comme produit de fonctions continues par morceaux.
 - Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x, t) = f(t)e^{ixt}$ est continue sur \mathbb{R} (exponentielle...)
 - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|g(x, t)| = |f(t)| |e^{ixt}| \leq |f(t)|$$

où $|f|$ est intégrable sur \mathbb{R} (car f l'est).

• $\hat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, t) dt$ est donc définie et continue sur \mathbb{R} .

II. Etude de la dérivabilité de R en 0

4. Pour tout $h > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f(nh)| \leq \frac{C}{1+n^2 h^2} \leq \frac{C}{n^2 h^2}$.
Or $\sum_{n \geq 1} \frac{C}{n^2 h^2}$ converge (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} |f(nh)|$ converge, donc $\sum_{n \geq 0} f(nh)$ converge absolument, donc converge, ce qui assure l'existence de $S(h) = h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$.
5. Soit $h > 0$.
 - *Il faut d'abord penser à justifier l'existence de l'intégrale...*
 - ϕ_h est continue par morceaux sur \mathbb{R} car sur tout segment $[a, b]$ de \mathbb{R} , ϕ_h a un nombre fini de discontinuités (les éléments de $h\mathbb{Z} \cap [a, b]$).
 - Pour tout $t \geq 0$,

$$|\phi_h(t)| = \left| f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) \right| \leq \frac{C}{\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)^2 + 1}$$

Or, l'encadrement classique de la partie entière donc, pour $x > 0$, $\frac{x-1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq \frac{x}{x} = 1$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

On a donc

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)^2 + 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\left(\frac{t}{h}\right)^2 h^2} = \frac{1}{t^2},$$

donc $\phi_h(t) = O_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, ϕ_h est

intégrable sur $[1, +\infty[$.

De plus, ϕ_h est continue par morceaux sur le segment $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, 1]$.

ϕ_h est donc intégrable sur \mathbb{R} , donc, en particulier, $\int_0^{+\infty} \phi_h(t) dt$ converge.

• Par suite,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \phi_h(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{nh} \phi_h(t) dt \quad (\text{car l'intégrale converge}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} \phi_h(t) dt \quad (\text{relation de Chasles}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) dt \quad (\text{définition de } \phi_h) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kh}^{(k+1)h} f(kh) dt \quad (\text{car } \forall t \in [kh, (k+1)h[, \frac{t}{h} \in [k, k+1[) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} hf(kh) \quad (\text{intégrale d'une constante}) \\
 &= h \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(kh) = h \sum_{k=0}^{+\infty} f(kh) \quad (\text{car la série converge}) \\
 &= S(h).
 \end{aligned}$$

6. Pour tout $h \in]0, 1]$, pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $t/h \geq 1$ et

$$\begin{aligned}
 |\phi_h(t)| &= \left| f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) \right| \leq \frac{C}{\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right)^2 + 1} \\
 &\leq \frac{C}{\left(\left(\frac{t}{h} - 1\right)h\right)^2 + 1} \quad (\text{car pour tout } x \geq 1, [x] \geq x - 1 \geq 0) \\
 &= \frac{C}{(t-h)^2 + 1} \leq \frac{C}{(t-1)^2 + 1} \quad (\text{car } t-h \geq t-1 \geq 0).
 \end{aligned}$$

7. Pour toute suite $(h_n) \in]0, 1]^{\mathbb{N}}$ de limite nulle, on pose $f_n : t \in [0, +\infty[\mapsto \phi_{h_n}(t)$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ car f est continue sur \mathbb{R} et $[\cdot]$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ .

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x-1 < [x] \leq x$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$t - h_n = \left(\frac{t}{h_n} - 1\right) h_n \leq \left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n \leq \frac{t}{h_n} h_n = t.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} t - h_n = t$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n = t$, et donc, par continuité de f sur \mathbb{R} , donc en t , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n\right) = f(t),$$

donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers f , qui est continue (par morceaux) sur \mathbb{R}_+ .

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|f_n(t)| = \left| f\left(\left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n\right) \right| \leq \frac{C}{1 + \left(\left\lfloor \frac{t}{h_n} \right\rfloor h_n\right)^2} \leq C,$$

et, pour tout $t > 1$, $|f_n(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}$ d'après la question précédente, donc

$$|f_n(t)| \leq \begin{cases} C & \text{si } t \in [0, 1] \\ \frac{C}{1+(t-1)^2} & \text{si } t > 1 \end{cases} = \varphi(t)$$

où φ est intégrable sur \mathbb{R}_+ car

- intégrable sur $[0, 1]$ car constante sur ce segment
- intégrable sur $[1, +\infty[$ (car primitive classique en $C \arctan(t-1)$)
- D'où, par convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(h_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

- Ceci étant valable pour toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, 1]^{\mathbb{N}}$, on obtient, par caractérisation séquentielle de la limite,

$$\lim_{h \rightarrow 0} S(h) = \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Remarque

On n'est pas obligé de repasser par le critère séquentiel, on peut appliquer la "version continue" du théorème de convergence dominée.

8. Prenons $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

f est continue sur \mathbb{R}^* et en 0 (car $\frac{\sin x^2}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} \rightarrow 1 = f(0)$), donc f est continue sur \mathbb{R} .

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin(x^2)}{x^2} \leq \begin{cases} \frac{x^2}{x^2} & \text{si } x \in [-1, 1] \quad (\text{car } |\sin(t)| \leq |t| \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}) \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \frac{1}{(1+x^2)/2} = \frac{2}{1+x^2} & \text{si } x \in [-1, 1] \quad (\text{car pour tout } x \in [-1, 1], 0 < (1+x^2)/2 \leq 1) \\ \frac{2}{1+x^2} & \text{si } |x| > 1 \quad (\text{car pour tout } |x| > 1, \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} \leq 2) \end{cases} \\ &= \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x > 0$, $f(n\sqrt{x}) = \frac{\sin(n^2x)}{n^2x}$, donc $\frac{\sin(n^2x)}{n^2} = \sqrt{x}^2 f(n\sqrt{x})$, donc

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{x}^2 f(n\sqrt{x}) = \sqrt{x} \left(\sqrt{x} \sum_{n=1}^{+\infty} f(n\sqrt{x}) \right) = \sqrt{x} \left(\sqrt{x} \sum_{n=0}^{+\infty} f(n\sqrt{x}) - \sqrt{x} f(0) \right) \\ &= \sqrt{x} \left(\overbrace{\left(\underbrace{S(\sqrt{x})}_{\substack{\rightarrow \sqrt{\pi/2} \\ x \rightarrow 0^+}} \right)}^{\rightarrow \sqrt{\pi/2} \neq 0} - \underbrace{\sqrt{x}}_{\rightarrow 0} \right) \\ &\underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{x} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi x}{2}}. \end{aligned}$$

- Par suite, comme $R(0) = 0$, on a $\frac{R(x)-R(0)}{x-0} = \frac{R(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} +\infty$, donc R n'est pas dérivable en 0 (et la courbe représentative de R admet une demi-tangente verticale en 0).

III. Formule sommatoire de Poisson

9. Posons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x + 2n\pi)$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| = |f(x + 2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1 + (x + 2n\pi)^2}, \quad \text{donc } f(x + 2n\pi) = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge absolument, donc converge.

De même, pour tout $n \geq 1$,

$$|f_{-n}(x)| = |f(x - 2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1 + (x - 2n\pi)^2}, \quad \text{donc } f(x - 2n\pi) = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} f_{-n}(x)$ converge absolument, donc converge.

Par suite, $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ et $\sum_{n \geq 1} f_{-n}(x)$ convergent, donc $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x)$ existe.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$f_n(x + 2\pi) = f(x + 2n\pi + 2\pi) = f(x + 2(n+1)\pi) = f_{n+1}(x),$$

donc $F(x + 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{n+1}(x) \stackrel{\text{en posant } j = n+1}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j(x) = F(x)$, donc F est 2π -périodique.

• Comme F est 2π -périodique, F est continue sur \mathbb{R} si et seulement si F est continue sur $[0, 2\pi]$.

Or :

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, 2\pi]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$|f_n(x)| = |f(x + 2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1 + (x + 2n\pi)^2} \leq \frac{C_1}{1 + (2n\pi)^2},$$

$$\text{donc } \|f_n\|_{\infty}^{[0, 2\pi]} \leq \frac{C_1}{1 + (2n\pi)^2} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty}^{[0, 2\pi]}$ converge, donc $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 2\pi]$.

$F_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est donc continue sur $[0, 2\pi]$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_{-n} est continue sur $[0, 2\pi]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$|f_{-n}(x)| = |f(x - 2n\pi)| \leq \frac{C_1}{1 + (x - 2n\pi)^2} \leq \frac{C_1}{1 + (2(n-1)\pi)^2},$$

$$\text{donc } \|f_{-n}\|_{\infty}^{[0, 2\pi]} \leq \frac{C_1}{1 + (2(n-1)\pi)^2} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \|f_{-n}\|_{\infty}^{[0, 2\pi]}$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} f_{-n}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 2\pi]$.

$F_1 : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(x)$ est donc continue sur $[0, 2\pi]$.

$F = F_0 + F_1$ est donc continue sur $[0, 2\pi]$ comme somme de fonctions continues, et, par suite, F est continue sur \mathbb{R} .

10. Posons, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $g_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \hat{f}(n)e^{inx}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur \mathbb{R} .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|g_n(x)| = |\hat{f}(n)e^{inx}| = |\hat{f}(n)| \leq \frac{C_2}{1 + n^2},$$

$$\text{donc } \|g_n\|_{\infty} \leq \frac{C_2}{1 + n^2} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 0} \|g_n\|_{\infty}$

converge, donc $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur \mathbb{R} .

$G_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$ est donc définie et continue sur \mathbb{R} .

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_{-n} est continue sur \mathbb{R} .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|g_{-n}(x)| = |\widehat{f}(-n)e^{-inx}| = |\widehat{f}(-n)| \leq \frac{C_2}{1+n^2},$$

donc $\|g_{-n}\|_\infty \leq \frac{C_2}{1+n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge absolument (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \|g_{-n}\|_\infty$ converge, donc $\sum_{n \geq 1} g_{-n}$ converge normalement, donc uniformément, sur \mathbb{R} .

$G_1 : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_{-n}(x)$ est donc définie et continue sur \mathbb{R} .

• $G = G_0 + G_1$ est donc définie et continue sur \mathbb{R} comme somme de deux fonctions continues.

• Comme, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, g_n est 2π -périodique, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(x+2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n(x+2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n(x) = G(x),$$

donc G est 2π -périodique.

11. Soit $p \in \mathbb{Z}$.

• $\sum_{n \geq 0} f_n(t)e^{-ipt}$ et $\sum_{n \geq 1} f_{-n}(t)e^{-ipt}$ convergent normalement, donc uniformément, sur $[0, 2\pi]$

car $\sum_{n \geq 0} f_n$ et $\sum_{n \geq 1} f_{-n}$ convergent normalement et $|e^{-ipt}| = 1$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto f_n(t)e^{-ipt}$ est continue sur $[0, 2\pi]$.

On a donc :

$$\begin{aligned} c_p(2\pi F) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\pi \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(t) \right) e^{-ipt} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(t) \right) e^{-ipt} dt \quad (\text{par définition de } \sum_{n \in \mathbb{Z}}) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) e^{-ipt} dt + \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(t) \right) e^{-ipt} dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) e^{-ipt} dt + \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} f_{-n}(t) e^{-ipt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_n(t) e^{-ipt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f_{-n}(t) e^{-ipt} dt \\ &\quad (\text{intervertion } \sum / \int \text{ justifiée grâce aux hypothèses vérifiées avant le calcul}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(t+2n\pi) e^{-ipt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(t-2n\pi) e^{-ipt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t) e^{-ip(t-2n\pi)} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} f(t) e^{-ip(t+2n\pi)} dt \quad (\text{changement de variable affine}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t) e^{-ipt} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} f(t) e^{-ipt} dt \quad (\text{car } t \mapsto e^{-ipt} \text{ est } 2\pi\text{-périodique}) \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-ipt} dt + \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-ipt} dt \\ &\quad (\text{relation de Chasles et intégrales convergentes car, comme } |f(t)| \leq \frac{C_1}{1+t^2}, f \text{ est intégrable}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ipt} dt = \widehat{f}(p). \end{aligned}$$

• De même, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $t \mapsto \widehat{f}(n)e^{int}$ est continue sur $[0, 2\pi]$ et $\sum_{n \geq 0} \widehat{f}(n)e^{int}$ et $\sum_{n \geq 1} \widehat{f}(-n)e^{-int}$ convergent normalement, donc uniformément sur $[0, 2\pi]$.

On a donc

$$\begin{aligned}
 c_p(G) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int} \right) e^{-ipt} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{i(n-p)t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(-n) e^{-i(n+p)t} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \widehat{f}(n) e^{i(n-p)t} dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \widehat{f}(-n) e^{-i(n+p)t} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \widehat{f}(n) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt}_{=0 \text{ si } n \neq p} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}(-n) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-i(n+p)t} dt}_{=0 \text{ si } n \neq -p} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \widehat{f}(p) \int_0^{2\pi} 1 dt = \widehat{f}(p).
 \end{aligned}$$

• On a donc $c_p(2\pi F) = c_p(G)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, donc, d'après la propriété admise (on a bien aussi $(2\pi F, G) \in (\mathcal{C}_{2\pi})^2$), on a $G = 2\pi F$.

12. Soit $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f\left(\frac{at}{2\pi}\right)$.

- g est continue sur \mathbb{R} comme composée de fonctions continues.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|g(t)| = \left| f\left(\frac{at}{2\pi}\right) \right| \leq \frac{C_1}{1 + (at/2\pi)^2}.$$

Or, $h : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{C_1}{1 + (at/2\pi)^2} = \frac{C_1(1+t^2)}{1 + (at/\pi)^2}$ est continue sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} h(t) = \frac{C_1\pi^2}{a^2}$, donc il existe A_1 et A_2 tel que

$$\forall t \geq A_1, 0 \leq h(t) \leq \frac{C_1\pi^2}{a^2} + 1 \quad \text{et} \quad \forall t \leq A_2, 0 \leq h(t) \leq \frac{C_1\pi^2}{a^2} + 1.$$

De plus, h est continue sur le segment $[A_1, A_2]$, donc est bornée sur cet intervalle. h est donc bornée sur $] -\infty, A_2]$, sur $[A_2, A_1]$ et sur $[A_1, +\infty[$, donc h est bornée sur \mathbb{R} . Soit M un majorant de h sur \mathbb{R} , alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|g(t)| \leq \frac{C_1}{1 + (at/2\pi)^2} = \frac{1}{1 + t^2} h(t) \leq \frac{M}{1 + t^2}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \widehat{g}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-itx} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{at}{2\pi}\right) e^{-itx} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-2i\pi xu/a} \frac{2\pi du}{a} \quad (\text{changement de variable affine } u = \frac{at}{2\pi}) \\
 &= \frac{2\pi}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i(2\pi x/a)u} du = \frac{2\pi}{a} \widehat{f}\left(\frac{2\pi x}{a}\right)
 \end{aligned}$$

Comme pour f , on montre alors l'existence de $N \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\widehat{g}(x)| = \left| \frac{2\pi}{a} \widehat{f}\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \right| \leq \frac{N}{1 + x^2}.$$

• En appliquant alors le résultat de la question précédente à la fonction g , qui vérifie les mêmes hypothèses que f , on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(2n\pi), \quad \text{ie} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi}{a} \widehat{f}\left(\frac{2\pi n}{a}\right) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na).$$

En divisant enfin par 2π de part et d'autres, on obtient bien le résultat demandé.

IV. Etude de la dérivabilité de R en π

13. • Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{it^2} - 1}{t^2} = \frac{1}{t^2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it^2)^n}{n!} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{t^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(it^2)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n t^{2n-2}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Cette formule est encore valable pour $t = 0$ car, pour $t = 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!} = i = f(0)$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!} \quad (*),$$

On applique maintenant le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions (version \mathcal{C}^∞) :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n : t \mapsto \frac{i^{n+1} t^{2n}}{(n+1)!}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} (car polynomiale) et à valeurs dans \mathbb{C} ,
- montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série des dérivées $\sum_{n \geq 0} u_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément sur tout segment $[-R, R]$ avec $R > 0$. En effet,

$$u_n^{(k)}(t) = \begin{cases} \frac{i^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{(2n)!}{(2n-k)!} t^{2n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq 2n \\ 0 & \text{si } k > 2n \end{cases},$$

donc $\|u_n^{(k)}\|_{\infty, [-R, R]} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(2n-k)!} R^{2n-k} \times \delta_{\{0 \leq k \leq 2n\}}$. On en déduit pour $n \geq k/2$:

$$\frac{\|u_{n+1}^{(k)}\|_{\infty, [-R, R]}}{\|u_n^{(k)}\|_{\infty, [-R, R]}} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+2)!(2n+2-k)!} R^{2n+2-k}}{\frac{(2n)!}{(n+1)!(2n-k)!} R^{2n-k}} = \frac{(2n+2)(2n+1)R^2}{(n+2)(2n+2-k)(2n+1-k)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1,$$

donc $\sum_{n \geq 0} \|u_n^{(k)}\|_{\infty, [-R, R]}$ converge par la règle de d'Alembert, ce qui prouve la convergence normale souhaitée.

Donc $f = \sum_{n \geq 0} u_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Remarque

Avec le cours sur les séries entières (CH14), ça va nettement plus vite !

La relation (*) montre que f est développable en série entière sur \mathbb{R} , donc f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} (d'après le cours).

14. Pour tout $t \neq 0$,

$$f'(t) = \frac{2ite^{it^2}t^2 - 2t(e^{it^2} - 1)}{t^4} = 2i \frac{e^{it^2}}{t} - 2 \frac{e^{it^2} - 1}{t^3}.$$

Comme $|e^{it^2}| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|f'(t)| = O\left(\frac{1}{t}\right) - O\left(\frac{1}{t^3}\right) = O\left(\frac{1}{t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Pour tout $t \neq 0$,

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2i \frac{2ite^{it^2}t - e^{it^2}}{t^2} - 2 \frac{2ite^{it^2}t^3 - 3t^2(e^{it^2} - 1)}{t^6} \\ &= -4e^{it^2} - 2i \frac{e^{it^2}}{t^2} - 4i \frac{e^{it^2}}{t^2} + 6 \frac{e^{it^2} - 1}{t^4} \\ &= -4e^{it^2} - 6i \frac{e^{it^2}}{t^2} + 6 \frac{e^{it^2} - 1}{t^4} = -4e^{it^2} + \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O} \left(\frac{1}{t^2} \right). \end{aligned}$$

15. • $x \mapsto e^{ix^2}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc $\int_0^1 e^{ix^2} dx$ converge.

• Soit $u(x) = \frac{1}{x}$, $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $v'(x) = xe^{ix^2}$, $v(x) = -\frac{i}{2}e^{ix^2}$.

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, +\infty[$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{i}{2} \frac{e^{ix^2}}{x} = 0$ car $|e^{ix^2}| = 1$.

D'où, par intégration par parties, $\int_1^{+\infty} e^{ix^2} dx = \int_1^{+\infty} u(x)v'(x)dx$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{i}{2} \frac{e^{ix^2}}{x^2} dx$.

Or, $\left| \frac{i}{2} \frac{e^{ix^2}}{x^2} \right| = \underset{x \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{x^2} \right)$,

donc, comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, $x \mapsto \frac{i}{2} \frac{e^{ix^2}}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc, en particulier, $\int_1^{+\infty} \frac{i}{2} \frac{e^{ix^2}}{x^2} dx$ converge, et, par suite, $\int_1^{+\infty} e^{ix^2} dx$ converge.

• $\int_0^1 e^{ix^2} dx$ et $\int_1^{+\infty} e^{ix^2} dx$ convergent, donc $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$ converge.

Comme de plus $x \mapsto e^{ix^2}$ est paire, $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx$ converge.

16. • Comme f est continue et intégrable (car $f(t) = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O} \left(\frac{1}{t^2} \right)$) sur \mathbb{R} , \widehat{f} est définie sur \mathbb{R} d'après la question 3.

• Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

Posons $u(t) = f(t)$, $u'(t) = f'(t)$, $v'(t) = e^{-ixt}$, $v(t) = \frac{i}{x}e^{-ixt}$.

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{i}{x}e^{ixt}}_{\text{borné}} \underbrace{f(t)}_{=O(\frac{1}{t^2}) \rightarrow 0} = 0$.

Enfin, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ converge (et vaut $\widehat{f}(x)$), donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \left[\frac{i}{x}f(t)e^{-ixt} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i}{x}f'(t)e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{i}{x}e^{-ixt}f'(t)dt.$$

• Posons cette fois $u(t) = f'(t)$, $u'(t) = f''(t)$, $v'(t) = -\frac{i}{x}e^{ixt}$, $v(t) = \frac{1}{x^2}e^{-ixt}$.

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t)v(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}e^{-ixt}}_{\text{borné}} \underbrace{f'(t)}_{\rightarrow 0 \text{ d'après 14}} = 0$.

Enfin, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ converge (et vaut $\widehat{f}(x)$), donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{i}{x}e^{-ixt}f'(t)dt \\ &= \left[\frac{1}{x^2}f'(t)e^{-ixt} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}f''(t)e^{-ixt}dt \\ &= -\frac{1}{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt}dt. \end{aligned}$$

• Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(t)e^{-ixt} &= (-4e^{it^2} + j(t))e^{-ixt} = -4e^{i(t^2-xt)} + j(t)e^{-ixt} \\ &= -4e^{i(t-x/2)^2} \times e^{-ix^2/4} + j(t)e^{-ixt} = -4e^{-ix^2/4}e^{i(t-x/2)^2} + j(t)e^{-ixt}, \end{aligned}$$

où $j(t) = f''(t) + 4e^{-it^2} = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (et ne dépend pas de x).

Par suite, $t \mapsto j(t)e^{-ixt}$ est continue sur \mathbb{R} et, comme $|j(t)e^{-ixt}| = |j(t)| = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $t \mapsto j(t)e^{-ixt}$ sera intégrable sur \mathbb{R} , et, en particulier, $\int_{-\infty}^{+\infty} j(t)e^{-ixt} dt$ converge et

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} j(t)e^{-ixt} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |j(t)| dt = \underset{x \rightarrow \pm\infty}{O}(1).$$

De plus, le changement de variable affine $u = t - x/2$ donne la convergence et la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -4e^{-ix^2/4} e^{i(t-x/2)^2} dt = -4e^{-ix^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu^2} du = -4e^{-ix^2/4} I,$$

car I converge d'après la question 15.

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt} dt$ converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt} dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} -4e^{-ix^2/4} e^{i(t-x/2)^2} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} j(t)e^{-ixt} dt \\ &= 4e^{-ix^2/4} I + \underset{x \rightarrow \pm\infty}{O}(1) = \underset{x \rightarrow \pm\infty}{O}(1) \end{aligned}$$

• On a donc bien

$$\widehat{f}(x) = -\frac{1}{x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(t)e^{-ixt} dt = -\frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{O}(1) = \underset{x \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

17. • f est continue sur \mathbb{R} .

De plus, comme $f(t) = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, $(t^2 + 1)f(t) = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O}(1)$, donc $t \mapsto (t^2 + 1)f(t)$ est bornée au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, et sur tout fermé borné de \mathbb{R} , donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t)| \leq \frac{M}{1 + t^2}.$$

De même, \widehat{f} est continue sur \mathbb{R} (d'après la question 3) et $\widehat{f}(t) = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (d'après la question 16), donc il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{f}(t)| \leq \frac{N}{1 + t^2}.$$

On peut donc appliquer la formule sommatoire de Poisson à f . D'où, pour tout $x > 0$, en prenant $a = \sqrt{x}$, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right),$$

ie, comme f est paire et donc \widehat{f} aussi (via le changement de variable $u = -t$),

$$i + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x} - 1}{n^2x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\widehat{f}(0) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right).$$

Comme toutes les séries suivantes sont absolument convergentes, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x} - 1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = F(x) - F(0).$$

On a donc

$$i + \frac{2}{x} (F(x) - F(0)) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\widehat{f}(0) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right), \quad \text{ie} \quad F(x) = F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2} \widehat{f}(0) - \frac{ix}{2} + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right).$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right| \leq \frac{C_2}{1 + \left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right)^2} = \frac{x C_2}{x + 4n^2\pi^2} \leq x \frac{C_2}{4n^2\pi^2},$$

donc, en sommant et en utilisant l'inégalité triangulaire généralisée,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) \right| \leq x \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_2}{4n^2\pi^2}}_{\text{constante}},$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) = O_{x \rightarrow 0^+}(x)$ et, par suite,

$$F(x) = F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2} \widehat{f}(0) - \frac{ix}{2} + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\sqrt{x}}\right) = F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2} \widehat{f}(0) - \frac{ix}{2} + O_{x \rightarrow 0^+}(x\sqrt{x}).$$

On a donc $b = -i/2$ et $a = \frac{1}{2} \widehat{f}(0)$.

18. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x + \pi) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2(x+\pi)}}{n^2} \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x} e^{in^2\pi}}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x} e^{in^2\pi}}{n^2} \\ &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} \quad (\text{car } n \text{ et } n^2 \text{ ont la même parité, donc } e^{in^2\pi} = (-1)^n) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik^2(4x)}}{4k^2} - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{e^{in^2x}}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik^2(4x)}}{k^2} - \left(F(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik^2(4x)}}{4k^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} F(4x) - \left(F(x) - \frac{1}{4} F(4x) \right) = \frac{1}{2} F(4x) - F(x). \end{aligned}$$

19. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} R(x + \pi) &= \text{Im}(F(x + \pi)) = \frac{1}{2} \text{Im}(F(4x)) - \text{Im}(F(x)) \\ &= \frac{1}{2} \text{Im} \left(F(0) + \sqrt{x} \widehat{f}(0) - 2ix + O_{x \rightarrow 0^+}(x\sqrt{x}) \right) - \text{Im} \left(F(0) + \frac{\sqrt{x}}{2} \widehat{f}(0) - \frac{ix}{2} + O_{x \rightarrow 0^+}(x\sqrt{x}) \right) \quad (\text{qu.17}) \\ &= -\frac{1}{2}x + O_{x \rightarrow 0^+}(x\sqrt{x}) \quad (\text{car } F(0) \in \mathbb{R}) \\ &= -\frac{1}{2}x + o_{x \rightarrow 0^+}(x). \end{aligned}$$

Comme R est impaire (somme de fonctions impaires) et 2π -périodique, on a, pour tout $x < 0$,

$$R(\pi+x) = R(\pi+x-2\pi) = R(-(\pi+(-x))) = -R(\pi+(-x)) = -\left(-\frac{1}{2}(-x) + o_{-x \rightarrow 0^+}(x)\right) = -\frac{1}{2}x + o_{x \rightarrow 0^-}(x).$$

On a donc $R(x) = -\frac{1}{2}x + o_{x \rightarrow 0}(x)$.

R est donc définie et continue en π (cf. qu. 1) et admet un développement limité à l'ordre 1 en π , donc R est dérivable en π et $R'(\pi) = -\frac{1}{2}$.
