E3A 2014 – MP – Maths A
Corrigé

Partie I

1. Classiquement, les solutions à valeurs réelles (respectivement complexes) sont les fonctions de la forme $x \longmapsto A\cos x + B\sin x$, où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ (respectivement $Ce^{ix} + De^{-ix}$, où $(C,D) \in \mathbb{C}^2$).

2. On a immédiatement $A\cos x + B\sin x = A + Bx + o(x)$ au voisinage de 0.

3. On en déduit que, si $A \neq 0$, alors $\dfrac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}} \sim \dfrac{A}{\sqrt{x}}$ en 0^+, et donc a en 0^+ une limite infinie.

Si, par contre, $A = 0$, alors $\dfrac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}} = B\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ en 0^+, donc a pour limite 0 en 0^+. La condition demandée est donc $A = 0$.

Si $A = 0$ et $B \neq 0$, le développement asymptotique précédent donne $B\sqrt{x}$ comme équivalent en 0^+ ; si $B = 0$, la fonction est la fonction nulle.

Partie II

4. L'équation $(E_{1/2})$ est linéaire et homogène, l'ensemble de ses solutions est donc un espace vectoriel. De plus, c'est une équation du second ordre, et le coefficient x^2 de y'' ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$, l'espace des solutions est donc de dimension 2.

5. Pour tout $x > 0$, on a $y(x) = x^{-1/2}z(x)$, donc $y'(x) = -\dfrac{x^{-3/2}}{2}z(x) + x^{-1/2}z'(x)$ puis

$$y''(x) = \frac{3x^{-5/2}}{4}z(x) - x^{-3/2}z'(x) + x^{-1/2}z''(x)$$

En substituant dans $(E_{1/2})$, on obtient après calculs

$$y \text{ est solution de } (E_{1/2}) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x > 0 \quad x^{3/2}z''(x) + x^{3/2}z(x) = 0$$

Puisqu'on travaille sur $]0,+\infty[$, on peut simplifier par $x^{3/2}$; l'équation cherchée est donc l'équation $z'' + z = 0$ étudiée en **I**.

6. Compte tenu de **6.** et **1.**, les solutions (à valeurs réelles) de $(E_{1/2})$ sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}}$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

7. D'après **3.**, les fonctions cherchées sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Bx^{-1/2}\sin x$, c'est-à-dire la droite vectorielle engendrée par la fonction $x \longmapsto x^{-1/2}\sin x$.

8. Une fonction vérifiant la condition posée aurait pour limite 0 en 0, donc doit vérifier $A = 0$; le **3.** montre alors que la seule solution est la fonction obtenue en prenant $A = 0$ et $B = \sqrt{2/\pi}$.

Partie III

9. On a immédiatement $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.

D'autre part, si $0 < a < b$, alors $\int_a^b t^x e^{-t}\,dt = [-t^x e^{-t}]_a^b + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,dt$ par intégration par parties. En faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$, on en déduit $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

10. a. Par exemple, R est la borne supérieure de l'ensemble des $t \in \mathbb{R}_+$ pour lesquels la série $\sum a_n t^n$ converge (ou pour lesquels $(a_n t^n)$ tend vers 0, ou est bornée,...).

b. Puisque S est solution de (E'_α) sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $x \in]-R,R[$,

$$\begin{aligned}
& x\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + (2\alpha+1)\sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = 0 \\
\iff & \sum_{p\geqslant 1} p(p+1)a_{p+1}x^p + (2\alpha+1)\sum_{p\geqslant 0}(p+1)a_{p+1}x^p + \sum_{p\geqslant 1} a_{p-1}x^p = 0 \\
\iff & a_1 + \sum_{p\geqslant 1}\big[(p+1)(p+2\alpha+1)a_{p+1} + a_{p-1}\big]x^p = 0
\end{aligned}$$

Pour passer de la première ligne à la deuxième, on a posé $p = n-1$ dans les deux premières sommes, $p = n+1$ dans la dernière.
L'égalité étant vérifiée sur $]-R,R[$, l'unicité du développement en série entière montre que les coefficients de la série entière du membre de gauche de la dernière équation, sont tous nuls ; ce qui fournit les relations demandées par l'énoncé.

11. a. Puisque $\alpha \geqslant 0$ par hypothèse, on a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\quad a_{2p+1} = \dfrac{-a_{2p-1}}{(2p+1)(2p+1+2\alpha)}$; puisque $a_1 = 0$, une récurrence immédiate montre que les coefficients d'indice impair sont tous nuls.

b. On a de même, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\quad a_{2p+2} = \dfrac{-a_{2p}}{4(p+1)(p+1+\alpha)}$.
Si $a_0 = 0$, les coefficients d'ordre pair sont eux aussi tous nuls, la série est la série nulle et son rayon de convergence est infini.
Si $a_0 \neq 0$, il est clair que $a_{2n} \neq 0$ pour tout n. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$\left|\frac{a_{2(n+1)}z^{2(n+1)}}{a_{2n}z^{2n}}\right| = \frac{|z|^2}{4(n+1)(n+1+\alpha)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc, par la règle de d'Alembert, la série $\sum a_{2n}z^{2n}$ converge absolument. Ceci étant vrai pour tout z, le rayon de convergence R est donc infini.

c. Le résultat est vrai pour $n = 0$; le résultat général s'en déduit par récurrence, en utilisant la relation de récurrence donnée en **b.** et la relation $\quad \Gamma(n+\alpha+2) = (n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)$.

12. La théorie n'a pas substantiellement évolué depuis la résolution de la question **4.** : c'est toujours un plan vectoriel.

13. Le raisonnement est strictement analogue à celui de la question **5.** ; on remplace y par $x^\alpha z$ dans l'équation (E_α), et après simplification par $x^{\alpha+1}$ (légitime puisqu'on travaille sur $\mathbb{R}_+^*$), on obtient l'équation (E'_α).

14. Soit (a_n) la suite définie par les conditions du **10.b** et $a_0 = \dfrac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $T(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_{2n}x^{2n}$.

La question **11.** montre que T est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, et la question **10.** qu'elle y est solution de l'équation (E'_α).
Enfin, la question **11.c** montre que $T(x) = x^{-\alpha}f_\alpha(x)$ pour tout $x > 0$; d'après **13.**, la fonction f_α est donc solution de (E_α) sur $\mathbb{R}_+^*$.

15. Avec les notations précédentes, la fonction T, somme d'une série entière, a pour limite $a_0 = \dfrac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}$ en 0 ; puisque $a_0 \neq 0$, on en déduit

$$f_\alpha(x) = x^\alpha T(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x^\alpha}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}$$

16. Soient $p \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$. Le changement d'indice $q = n+1$ donne

$$f_{p+1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p+1} = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{-(-1)^q}{(q-1)!(q+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2q+p-1}$$

On en déduit

$$
\begin{aligned}
f_{p-1}(x)-f_{p+1}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}\\
&= \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{p-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n+p)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n+p)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}
\end{aligned}
$$

D'autre part : $\quad f_p'(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n+p)}{n!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p-1}$ (le facteur $1/2$ vient de la dérivation de $x/2$).

On a donc finalement $\quad f_{p-1}(x)-f_{p+1}(x)=2f_p'(x)$.

Partie IV

17. Pour $(t,x)\in[0,\pi]\times\mathbb{R}$, on pose $h(t,x)=\cos(pt-x\sin t)$. Alors :

- pour tout $x_0\in\mathbb{R}$, la fonction $h(\cdot,x_0):t\longmapsto h(t,x_0)$ est continue, donc intégrable sur le segment $[0,\pi]$;
- pour tout $t_0\in[0,\pi]$, la fonction $h(t_0,\cdot)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $x_0\in\mathbb{R}$, la fonction $\dfrac{\partial h}{\partial x}(\cdot,x_0):t\longmapsto\sin t\sin(pt-x\sin t)$ est continue, donc intégrable, sur $[0,\pi]$;
- pour tout $(t,x)\in[0,\pi]\times\mathbb{R}$, on a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(t,x)\right|\leqslant 1$, et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0,\pi]$.

Le facteur $1/\pi$ ne changeant rien au problème, le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre permet de conclure que g_p est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$g_p'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\partial h}{\partial x}(t,x)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\sin(pt-x\sin t)\,dt$$

On montre de même que g_p' est de classe C^1, donc que g_p est de classe C^2, et que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$g_p''(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos(pt-x\sin t)\,dt$$

18. Soit $p\in\mathbb{N}$. On vérifie facilement que $g_p(0)=0$, donc que g_p vérifie (E_p) en $x=0$. Pour $x\neq 0$, effectuons donc une intégration par parties dans $g_p'(x)$, en primitivant le facteur $\sin t$ et en ayant soin de ne pas fixer la valeur de la constante d'intégration :

$$
\begin{aligned}
\pi g_p'(x) &= \left[(C-\cos t)\sin(pt-x\sin t)\right]_{t=0}^{\pi}+\int_0^{\pi}(\cos t-C)(p-x\cos t)\cos(pt-x\sin t)\,dt\\
&= x\int_0^{\pi}(\cos t-C)\left(\frac{p}{x}-\cos t\right)\cos(pt-x\sin t)\,dt
\end{aligned}
$$

En prenant maintenant $C=-p/x$, on obtient

$$
\begin{aligned}
\pi g_p'(x) &= \frac{p^2}{x}\int_0^{\pi}\cos(pt-x\sin t)\,dt-x\int_0^{\pi}\cos^2 t\cos(pt-x\sin t)\,dt\\
&= \frac{\pi p^2}{x}g_p(x)-x\int_0^{\pi}\cos(pt-x\sin t)\,dt+x\int_0^{\pi}\sin^2 t\cos(pt-x\sin t)\,dt\\
&= \frac{\pi}{x}\left(p^2g_p(x)-x^2g_p(x)-x^2g_p''(x)\right)
\end{aligned}
$$

et donc g_p est solution de (E_p).

19. a. Soit $n \geqslant 2$. On effectue une intégration parties :

$$w_n = \int_0^\pi \sin t \sin^{n-1} t\, dt = [-\cos t \sin^{n-1} t]_0^\pi + (n-1)\int_0^\pi \cos^2 t \sin^{n-2} t\, dt$$
$$= (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2} t\, dt - (n-1)\int_0^\pi \sin^n t\, dt$$

d'où l'on tire immédiatement la relation cherchée.

b. On en déduit, pour tout $n \geqslant 1$:

$$w_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{1}{2}\,w_0 = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2}$$

ce qui se justifie évidemment par une récurrence simple.

20. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,\pi]$. On a $\cos(t - x\sin t) = \cos t\cos(x\sin t) + \sin t\sin(x\sin t)$. Le changement de variable $u = \pi - t$ donne

$$\int_0^\pi \cos t\cos(x\sin t)\, dt = -\int_\pi^0 (-\cos u)\cos(x\sin u)\, du = -\int_0^\pi \cos u\cos(x\sin u)\, du$$

et donc cette intégrale et nulle, ce qui fournit l'expression demandée pour g_1.

D'autre part, $\pi g_0(x) = \int_0^\pi \cos(x\sin t)\, dt$, et on sait que $\cos(x\sin t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}\sin^{2k} t}{(2k)!}$. Posons $f_k(t) = \frac{(-1)^k x^{2k}\sin^{2k} t}{(2k)!}$ pour tout $t \in [0,\pi]$.

Les fonctions f_k sont continues par morceaux donc intégrables sur $[0,\pi]$ et la série $\sum f_k$ converge simplement sur $[0,\pi]$, de somme $\cos(x\sin t)$ continue sur $[0,\pi]$. Enfin, on a clairement $|f_k(t)| \leqslant \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ pour tout k et tout t, d'où, pour tout k, $\int_0^\pi |f_k(t)|\, dt \leqslant \frac{\pi x^{2k}}{(2k)!}$; donc la série $\sum \int_0^\pi |f_k(t)|\, dt$ converge.

On sait qu'alors on peut intervertir intégrale et somme ; autrement dit,

$$\pi g_0(x) = \int_0^\pi \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^\pi f_k(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big[\frac{(-1)^k}{(2k)!}\int_0^\pi \sin^{2k} t\, dt\Big] x^{2k}$$

La question **19.b** donne alors $\quad g_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} \quad$ qui constitue le développement cherché.

On montre de même, à partir de la formule établie au début de cette question, que

$$\pi g_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big[\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int_0^\pi \sin^{2k+2} t\, dt\Big] x^{2k+1}$$

En utilisant de nouveau **19.b**, on obtient alors $\quad g_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}k!(k+1)!} x^{2k+1}$.

21. Il suffit de comparer les développements en série entière obtenus à la question précédente, à ceux qui ont été donnés en fin de partie **III** pour les fonctions f_p.

22. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a\sin b$. Avec $a = pt - x\sin t$ et $b = t$, cela fournit, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_{p-1}(x) - g_{p+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\sin(pt - x\sin t)\sin t\, dt = 2g_p'(x)$$

23. L'égalité a déjà été vérifiée aux rangs 0 et 1. Si elle est vraie jusqu'à un rang $p \geqslant 1$, alors $g_{p+1} = g_{p-1} - 2g_p' = f_{p-1} - 2f_p'$ par hypothèse de récurrence ; la question **16.** montre alors que $g_{p+1} = f_{p+1}$, ce qui achève la récurrence.

Partie V

24. La valeur de $g(t)$ ne dépend en fait que de $\cos t$, g est donc clairement 2π-périodique.

25. On a $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nt)g(t)\,dt$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nt)g(t)\,dt$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
On a en fait $g(t)=\cos(x\cos t)$ pour tout t. Les théorèmes usuels montrent donc que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Elle est donc en particulier continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux, ce qui suffit pour que sa série de Fourier converge vers g uniformément sur $\mathbb{R}$.

26. Puisque $g(t)$ ne dépend que de $\cos t$, g est paire ; on sait qu'alors ses coefficients b_n sont tous nuls.

27. Soit $t\in\mathbb{R}$; alors $x\cos(t+\pi)=-x\cos t$; par suite $\exp(ix\cos t)$ et $\exp\big(ix\cos(t+\pi)\big)$ sont conjugués, donc ont même partie réelle. On a bien $g(t+\pi)=g(t)$, g est π-périodique.
Soit alors $k\in\mathbb{N}$. Le changement de variable $t=u+\pi$ donne

$$\int_\pi^{2\pi}\cos\big((2k+1)t\big)g(t)\,dt=\int_0^\pi\cos\big((2k+1)u+(2k+1)\pi\big)g(u+\pi)\,du=-\int_0^\pi\cos\big((2k+1)u\big)g(u)\,du$$

et donc $\int_0^{2\pi}\cos\big((2k+1)t\big)g(t)\,dt=0$, ce qui donne $a_{2k+1}=0$.

28. Soit donc $k\in\mathbb{N}$. Commençons par noter que

$$\pi g_{2k}(x)=\int_0^\pi\cos(2kt)\cos(x\sin t)\,dt+\int_0^\pi\sin(2kt)\sin(x\sin t)\,dt$$

Comme à la question **20.**, le changement $u=\pi-t$ permet de montrer que la deuxième intégrale est nulle.
D'autre part, la fonction figurant dans la première intégrale est π-périodique ; on a donc

$$\pi g_{2k}(x)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2kt)\cos(x\sin t)\,dt$$

Posons enfin $t=u+\pi/2$ dans cette intégrale :

$$\pi g_{2k}(x)=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\cos(2ku+k\pi)\cos\left[x\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\right]dt=\frac{(-1)^k}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2ku)\cos(x\cos u)\,du$$

le dernier changement de bornes étant justifié par la 2π-périodicité de la fonction intégrée. Cela fournit bien $a_{2k}=2(-1)^k g_{2k}(x)$.

29. Compte tenu des questions **26.** à **28.**, le résultat demandé exprime simplement le fait que g est la somme de sa série de Fourier.