Concours blanc MPI, épreuve math 2 (3h)
Sujet B (niveau CCINP), Calculatrices interdites

Problème

On étudie dans ce problème quelques propriétés des fonctions de Bessel, obtenues à partir de l'équation différentielle :

$$(E_\alpha) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

où α est un paramètre réel positif.

Partie I

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $z'' + z = 0$.

2. Pour deux réels A et B, déterminer un développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction $x \mapsto A\cos x + B\sin x$.

3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que la fonction

$$x \mapsto \frac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}}$$

admette une limite finie en 0^+. Cette condition étant satisfaite, donner un équivalent de $\frac{A\cos x + B\sin x}{\sqrt{x}}$ lorsque x tend vers 0^+.

Partie II

On considère dans cette partie l'équation différentielle :

$$(E_{\frac{1}{2}}) \qquad x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

dont on cherche les solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

4. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle $(E_{\frac{1}{2}})$?

5. Soit y une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et soit z la fonction définie par :

$$z : \begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{\frac{1}{2}}y(x) \end{array}$$

Démontrer que y est solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

6. Résoudre l'équation différentielle $(E_{\frac{1}{2}})$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

7. Démontrer que l'ensemble des solutions de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0, +\infty[$ qui possèdent une limite finie en 0 est un espace vectoriel de dimension 1.

8. Démontrer qu'il existe une unique solution de $(E_{\frac{1}{2}})$ sur $]0, +\infty[$, notée $f_{\frac{1}{2}}$, telle que :

$$f_{\frac{1}{2}}(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \sqrt{\frac{2x}{\pi}}$$

Partie III

Dans cette partie, α est un réel fixé, $\alpha \geq 0$ et on considère les équations différentielles :

$$\begin{aligned} (E_\alpha) \qquad & x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \\ (E'_\alpha) \qquad & xz'' + (2\alpha + 1)z' + xz = 0 \end{aligned}$$

9. On rappelle la définition de la fonction Γ :

$$\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Démontrer que $\Gamma(1) = 1$ et, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

10. On considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ dont le rayon de convergence est noté R et dont la somme sur l'intervalle $]-R, R[$ est notée S. On suppose dans cette question que R est strictement positif.

10. a. Rappeler une définition du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

10. b. On suppose dans cette question que S est solution de l'équation différentielle (E'_α) sur $]-R, R[$. Démontrer que $a_1 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)(n+1+2\alpha)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

11. On suppose ici que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ satisfait les deux conditions obtenues à la question précédente.

11. a. Démontrer que $a_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. b. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

11. c. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n\Gamma(\alpha+1)}{n!2^{2n}\Gamma(n+\alpha+1)}a_0$.

12. Préciser la nature de l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle (E_α).

13. Soit $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On définit la fonction z :

$$\begin{array}{rccc} z : &]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^{-\alpha}y(x) \end{array}$$

Démontrer que y est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, z est solution de (E'_α) sur $]0, +\infty[$.

14. En déduire que la fonction f_α définie sur $]0, +\infty[$ en posant :

$$\forall x > 0,\ f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^{2n+\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)} x^{2n+\alpha}$$

est solution de (E_α) sur $]0, +\infty[$.

15. Déterminer un équivalent de $f_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0.

Dans la suite du problème, on considère le cas particulier où $\alpha = p$ est un entier naturel et f_p est la solution de (E_p) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

(insistons sur le fait que cette fonction f_p est définie sur $\mathbb{R}$).

16. Pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel x, expliciter $f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x)$ comme somme d'une série entière. En déduire l'existence d'une constante k que l'on précisera telle que $f_{p-1}(x) - f_{p+1}(x) = k f_p'(x)$.

Partie IV

Dans cette partie, $p \in \mathbb{N}$ est un entier naturel fixé et on considère la fonction f_p définie dans la partie précédente. On définit également une fonction g_p sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_p(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(pt - x \sin t)\, dt$$

17. Démontrer que g_p est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et expliciter (sous forme intégrale) les fonctions g_p' et g_p''.

18. En intégrant par parties $g_p'(x)$, vérifier que g_p est solution de l'équation différentielle (E_p).

19. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note $w_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^n(t)\, dt$.

19. a. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $n w_n = (n-1) w_{n-2}$.

19. b. Donner l'expression de w_{2n} en fonction de n.

20. Établir l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin t)\, dt$$

puis démontrer que g_0 et g_1 sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

21. Démontrer les égalités de fonctions $g_0 = f_0$ et $g_1 = f_1$.

22. Démontrer que pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$g_{p-1}(x) - g_{p+1}(x) = 2 g_p'(x)$$

23. Démontrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, les fonctions g_p et f_p sont égales.

est solution de (E_n) sur $[0, \ldots$

18. Déterminer un équivalent de $f_n(x)$ lorsque n tend vers ... .

Dans la suite du problème, on considère ... et f_n est la solution de (E_n) ...

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sum_{k=0} \ldots$$

(indiquons sur le fait que cette fonction ... sur ... $\mathbb{R}$.

19. Pour tout entier ... développable en série entière ... En déduire l'existence d'une ... $f_n(x) \ldots f_{n+1}(x) = \lambda f_n'(x)$.

Partie IV

Dans cette partie, ... est un entier ... définie dans la partie précédente. ...

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \int \ldots$$

17. Démontrer que ... de classe C^∞ sur ... et exprimer ...

18. ... intégrant par parties ... vérifier que ... est solution de l'équation ...

19. Pour tout entier naturel ... on note ... $\int \ldots$

19. a. Démontrer que pour tout ...

19. b. Donner l'expression ... en fonction de ...

20. Établir l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ldots$$

puis démontrer que ... sur $\mathbb{R}$.

21. Déterminer les ... de ...

22. Démontrer que pour tout entier ...

23. Démontrer que pour tout ...