Concours blanc MPI, épreuve maths 2 (3h)

Sujet A (niveau Centrale-Mines) ; Calculatrices interdites

L'attention du candidat est attirée sur le fait que l'espace préhilbertien étudié *n'est pas le même* dans les différentes parties du problème.

**Définitions**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire. On dit que $E$ est un *espace à noyau reproduisant* sur $I$ lorsqu'il vérifie les trois propriétés suivantes :

1. l'espace $E$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ;
2. pour tout $x \in I$, l'application $V_x : (E, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ définie par $V_x(f) = f(x)$ est continue ;
3. pour tout $x \in I$, il existe une application $k_x \in E$ vérifiant,

$$\forall f \in E, \qquad f(x) = \langle k_x, f \rangle.$$

On appelle alors *noyau reproduisant* l'application $K$ définie par

$$\forall (x,t) \in I^2, \qquad K(x,t) = k_x(t).$$

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux s'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la restriction de $f$ à $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_{i-1}, x_i]$.

# I Préliminaires

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, de norme associée $\|\cdot\|$. Soit $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant,

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Q 1. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$. Montrer que l'orthogonal $F^{\perp}$ de $F$ est stable par $u$.

On suppose qu'il existe un vecteur unitaire $x_0 \in F$ vérifiant

$$\langle u(x_0), x_0 \rangle = \sup_{x \in F, \|x\|=1} \langle u(x), x \rangle.$$

Pour tout vecteur unitaire $y \in F$ orthogonal à $x_0$, on pose, pour tout réel $t$,

$$\gamma(t) = x_0 \cos t + y \sin t,$$
$$\varphi(t) = \langle u \circ \gamma(t), \gamma(t) \rangle.$$

Q 2. Montrer que $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Q 3. Calculer $\|\gamma(t)\|$ puis justifier que $\varphi'(0) = 0$.

Q 4. En déduire que $u(x_0)$ est orthogonal à $y$.

Q 5. Montrer que $x_0$ est vecteur propre de $u$.

# II Étude d'un opérateur

Dans cette partie, $E$ désigne l'espace vectoriel des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continues, muni du produit scalaire défini par,

$$\forall (f, g) \in E^2, \qquad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$

On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.

Pour tout $s \in [0,1]$, on définit la fonction $k_s$ par,

$$\forall t \in [0,1], \qquad k_s(t) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si } t < s, \\ s(1-t) & \text{si } t \geqslant s. \end{cases}$$

On note également, pour tout $(s,t) \in [0,1]^2$, $K(s,t) = k_s(t)$.

**Q 6.** Soit $s \in ]0,1[$. Tracer la courbe représentative de $k_s$ sur $[0,1]$.

**Q 7.** Montrer que $K$ est continue sur $[0,1] \times [0,1]$.

Pour tout $f \in E$, on pose,

$$\forall s \in [0,1], \qquad T(f)(s) = \int_0^1 k_s(t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**Q 8.** Montrer que $T$ est un endomorphisme continu de $E$.

Soit $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ formé des fonctions polynomiales. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k$ la fonction définie par $p_k(x) = x^k$.

**Q 9.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $T(p_k)$. En déduire que $F$ est stable par $T$.

**Q 10.** En déduire $(T(p))''$ pour tout $p \in F$.

**Q 11.** Soit $f \in E$. Calculer $T(f)(0)$ et $T(f)(1)$.

**Q 12.** Pour tout $f \in E$, montrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ puis que $T(f)'' = -f$.

**Q 13.** Montrer que $T$ est injectif.

**Q 14.** Déterminer l'image de $T$.

**Q 15.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre non nulle de $T$ et $f$ un vecteur propre associé. Montrer que $f$ est solution de l'équation différentielle $\lambda f'' = -f$.

**Q 16.** Déterminer les valeurs propres de $T$ et montrer que les sous-espaces propres associés sont de dimension 1.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x)$. On note $G = \mathrm{Vect}((g_k)_{k\in\mathbb{N}^*})$ et $H = G^\perp$.

**Q 17.** Justifier que, pour tout $(f,g) \in E^2$, on a

$$\langle T(f), g\rangle = \langle f, T(g)\rangle$$

On pourra utiliser la question 12.

On admet que,

$$H \neq \{0\} \implies \exists f \in H \text{ telle que } \begin{cases} \|f\| = 1, \\ \langle T(f), f\rangle = \sup\limits_{h\in H, \|h\|=1} \langle T(h), h\rangle. \end{cases}$$

**Q 18.** En déduire que $H = \{0\}$.

**Q 19.** Montrer que la famille de vecteurs $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est orthonormale.

On admet pour la suite que $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite totale. ( ie $G = \mathrm{Vect}((g_k)_{k\geq 1})$ est dense dans $(E, \|\cdot\|)$)

Pour tout $f \in E$, on pose,

$$\forall x \in [0,1], \qquad \Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}\langle f, g_k\rangle g_k(x).$$

**Q 20.** Montrer que $\Phi$ est continue.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $f_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \langle f, g_k\rangle g_k$.

**Q 21.** Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} \|T(f_N) - \Phi\| = 0.$$

**Q 22.** En déduire $T(f) = \Phi$.

# III Exemples d'espaces à noyau reproduisant

Dans cette partie, $E_1$ désigne l'espace vectoriel des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continues, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

### *III.A – Un exemple*

**Q 23.** Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $E_1$ en posant

$$\forall (f,g) \in (E_1)^2, \qquad (f \mid g) = \int_0^1 f'(t) g'(t) \, dt.$$

Dans la suite de cette partie, on désigne par $N$ la norme associée à ce produit scalaire.

**Q 24.** Montrer que, pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$, on a

$$\forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \leqslant \sqrt{x \int_0^x (f'(t))^2 \, dt}.$$

On pose, pour tout $f \in E_1$,

$$U(f)(s) = \int_0^1 k_s'(t) f'(t) \, dt,$$

où $k_s$ a été défini dans la partie précédente.

**Q 25.** Soit $f \in E_1$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $U(f) = -T(f'')$. En déduire que $U(f) = f$.

**Q 26.** Montrer que $U$ est l'application identité de $E_1$.

**Q 27.** Démontrer que l'espace préhilbertien $(E_1, (\cdot \mid \cdot))$ est un espace à noyau reproduisant et que son noyau reproduisant est l'application $K$ définie dans la partie précédente.

### *III.B – Un contre-exemple*

On considère à nouveau l'espace $E$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) \, dt.$$

**Q 28.** Montrer que $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ n'est pas un espace à noyau reproduisant.

### *III.C – Fonctions développables en série entière*

**Q 29.** Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que la série $\sum (a_n)^2$ soit convergente.

Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n t^n$ est supérieur ou égal à 1.

Dans la suite de cette sous-partie, on considère l'ensemble $E_2$ des fonctions de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

où $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\sum (a_n)^2$ convergente. Pour $f$, $g \in E_2$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \qquad \text{où } f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \text{ et } g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n.$$

**Q 30.** Montrer que $E_2$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un espace préhilbertien réel.

**Q 31.** Soit $x \in ]-1,1[$. Déterminer $g_x \in E_2$ tel que, pour tout $f \in E_2$,

$$f(x) = \langle g_x, f \rangle$$

**Q 32.** En déduire que $E_2$ est un espace à noyau reproduisant et préciser son noyau.