DS08 du 06/01/2026 (3h)

Calculatrice interdite.

Etude d'une série de fonctions

Le sujet est consacré à l'étude de quelques propriétés de dérivabilité de la fonction $R : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$

Notations

- On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Dans le cas où les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} u_{-n}$ sont toutes deux convergentes, on pose :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}.$$

I. Préliminaires

On établit dans cette partie quelques résultats utiles dans la suite du problème.

1. Montrer que la fonction R est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx$ est convergente.

Dans la suite du problème, on **admet** que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. On pose

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

3. Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est bien définie, et continue sur $\mathbb{R}$.

II. Etude de la dérivabilité de R en 0

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

On pose :

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) \text{ pour tout } h > 0.$$

4. Justifier l'existence de $S(h)$ pour tout $h > 0$.

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\phi_h : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f\left(\left\lfloor \dfrac{t}{h} \right\rfloor h\right) \end{cases}.$$

5. Montrer que $S(h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_h(t)dt$.
   On pensera à justifier la convergence de l'intégrale.
6. Montrer que, pour tous $h \in]0;1]$ et $t \in [1;+\infty[$, on a

$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}.$$

7. En déduire que

$$S(h) \to \int_0^{+\infty} f(t)dt \text{ quand } h \to 0.$$

8. En déduire un équivalent de $R(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs strictement positives.
   La fonction R est-elle dérivable en 0 ?

III. Formule sommatoire de Poisson

Dans cette partie, on note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. Si u est un élément de $\mathcal{C}_{2\pi}$, on pose

$$c_p(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t)e^{-ipt}dt \text{ pour tout } p \in \mathbb{Z}.$$

On **admet** le résultat suivant, que l'on pourra utiliser sans démonstration dans toute cette partie : si u et v sont deux éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ qui vérifient $c_p(u) = c_p(v)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, alors $u = v$.

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe des réels strictement positifs C_1 et C_2 tels que

$$|f(t)| \leq \frac{C_1}{1+t^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et } |\widehat{f}(x)| \leq \frac{C_2}{1+x^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

où la fonction $\widehat{f}$ a été définie à la question 3. On pose également

$$F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2n\pi) \text{ et } G(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

9. Montrer que la fonction F est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
10. Montrer que la fonction G est bien définie, 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
11. Montrer que $G = 2\pi F$.

En particulier, on a $G(0) = 2\pi F(0)$, soit :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2n\pi).$$

12. Montrer que, pour tout réel strictement positif a, on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(na) = \frac{1}{a}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{a}\right).$$

Cette égalité constitue la *formule sommatoire de Poisson.*

IV. Etude de la dérivabilité de R en π

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{it^2} - 1}{t^2} & \text{si } t \neq 0 \\ i & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

13. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
 On pourra d'abord écrire f sous la forme d'une série de fonctions.
14. Etablir que $f'(t) \to 0$ quand $t \to \pm\infty$, et que $f''(t) = -4e^{it^2} + O(t^{-2})$ quand $t \to \pm\infty$.
15. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx$ est convergente.
16. Montrer que $\widehat{f}(x) = O(x^{-2})$ quand $x \to \pm\infty$.

On pose à présent

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in^2 x}}{n^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

17. En utilisant la formule sommatoire de Poisson, montrer qu'il existe des nombres complexes a et b tels que

 $$F(x) = F(0) + a\sqrt{x} + bx + O(x^{3/2}) \text{ quand } x \to 0 \text{ par valeurs strictement positives.}$$

 Préciser la valeur de b, et exprimer a en fonction de I (l'intégrale I a été définie à la question 15).
18. Exprimer, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(\pi + x)$ en fonction de $F(4x)$ et de $F(x)$.
19. Déduire de ce qui précède que la fonction R est dérivable en π, et préciser la valeur de $R'(\pi)$.

* * *