DS07 du 13/12/2025 (4h)
Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 2 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Autour du théorème de Weierstrass

Partie I. Exemples et contre-exemples

1. Théorème de la double limite en 0^+ : soit (f_n) une suite de fonctions de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x\to 0^+}{\to} \ell_n \in \mathbb{R}$ et que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $]0,1]$ (ou au moins sur un voisinage V de 0). Alors $\ell_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell \in \mathbb{R}$ et $f(x) \underset{x\to 0^+}{\to} \ell$.

2. (a) Supposons qu'il existe une suite (P_n) de polynômes qui converge uniformément vers $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;1]$. Vu que les polynômes P_n possèdent tous une limite dans $\mathbb{R}$ lorsque $x \to 0^+$ (qui vaut $\ell_n = P_n(0)$), on peut appliquer le théorème de la double limite, ce qui a pour conséquence que h possède une limite dans $\mathbb{R}$ (donc finie) en 0^+, et cela est contradictoire. Une telle suite de polynômes n'existe donc pas.

   (b) Ce résultat illustre le fait qu'on ne peut pas se passer de l'hypothèse de compacité du domaine $[a,b]$ dans le théorème de Weierstrass (l'approximation polynomiale uniforme de la fonction continue $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ est impossible sur $]0,1]$ par exemple).

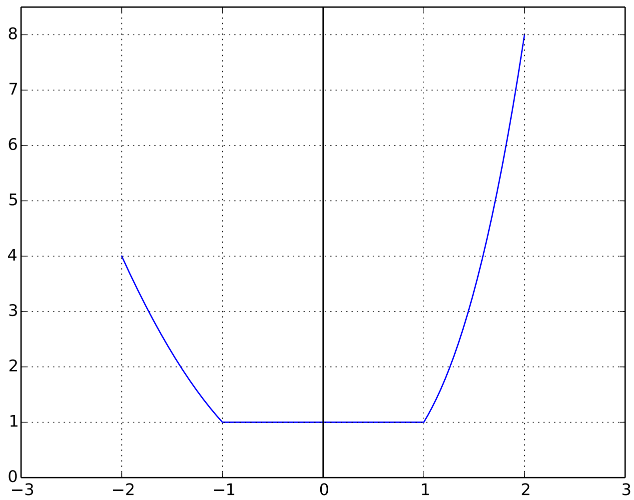
3. (a) Dans l'espace vectoriel normé $E = (\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}), \| \|_\infty)$, l'ensemble $\mathcal{P}_N = Vect((x \mapsto x^k)_{0\le k\le N})$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie $(N+1)$, donc c'est une partie fermée de E (théorème du cours).

   (b) Si une fonction $f \in E$ est limite uniforme de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier N fixé, alors on a une suite (P_n) de vecteurs de $\mathcal{P}_N$ qui converge vers f (au sens de la norme $\|.\|_\infty$ sur E), donc sa limite f reste dans $\mathcal{P}_N$ (puisqu'il s'agit d'une partie fermée, elle est stable par passage à la limite).
   Cette fonction f est donc elle-même un polynôme de degré inférieur ou égal à N.

4. (a) L'application N_1 est bien définie (car tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est continu, donc borné sur le segment $[-2,-1]$), et clairement positive. De plus :
   - Si $N_1(P) = 0$, alors $\sup\limits_{[-2,-1]} |P| = 0$, ce qui signifie que la fonction positive $|P|$ est nulle sur le segment $[-2,-1]$. Le polynôme P possède alors une infinité de racines, ce qui entraîne $P = 0$.
   - Pour tout $(\lambda, P) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}[X]$, on a
   $$N_1(\lambda P) = \sup_{x\in[-2,-1]} |\lambda P|(x) = \sup_{x\in[-2,-1]} |\lambda||P(x)| = |\lambda| \times \sup_{x\in[-2,-1]} |P(x)|$$
   (car la constante $|\lambda|$ est positive). Donc $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$.
   - Pour tous polynômes P, Q et pour tout $x \in [-2,-1]$, on a
   $$|P+Q|(x) = |P(x)+Q(x)| \le |P(x)| + |Q(x)| \le N_1(P) + N_1(Q),$$
   (puisque $|P(x)| \le N_1(P)$ et $|Q(x)| \le N_1(Q)$).
   Le réel $N_1(P) + N_1(Q)$ est un majorant de l'ensemble $\{|P+Q|(x),\ x \in [-2,-1]\}$, il est donc plus grand que la borne supérieure de cet ensemble, i.e.
   $$N_1(P) + N_1(Q) \ge \sup\{|P+Q|(x),\ x \in [-2,-1]\} = N_1(P+Q).$$

   L'application N_1 est donc bien une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

(b) i. Voici la représentation graphique de f :



ii. La fonction f étant clairement continue sur $[-2;2]$, il existe, d'après le théorème de Weierstrass, une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[-2;2]$.

iii. La convergence uniforme de (P_n) vers f signifie que $\sup_{x\in[-2;2]} |P_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En outre, en considérant la fonction polynomiale $f_1 : x \mapsto x^2$ (qui coïncide avec f sur $[-2;-1]$), on a

$$N_1(P_n - f_1) = \sup_{x\in[-2;-1]} |P_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in[-2;2]} |P_n(x) - f(x)|,$$

donc on a aussi $N_1(P_n - f_1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que dans l'espace normé $(\mathbb{R}[X], N_1)$, la suite (P_n) converge vers le polynôme X^2.
De façon similaire, dans l'espace normé $(\mathbb{R}[X], N_2)$, la même suite (P_n) converge vers le polynôme X^3 (puisque la fonction $f_2 : x \mapsto x^3$ coïncide avec f sur $[1;2]$).

Partie II. Application : un théorème des moments

5. (a) Par linéarité de l'intégrale sur un segment, l'hypothèse $\left(\forall k \in \mathbb{N},\ \int_a^b x^k f(x)dx = 0\right)$ entraîne que $\int_a^b P(x)f(x)dx = 0$ pour tout polynôme P.

(b) Considérons une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ (une telle suite existe d'après le théorème de Weierstrass puisque f est continue).
D'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \int_a^b P_n(x)f(x)dx = 0$.
Or, $\int_a^b P_n(x)f(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f^2(x)dx$, puisque

$$\left|\int_a^b P_n(x)f(x)dx - \int_a^b f^2(x)dx\right| \leq \int_a^b |P_n(x)-f(x)||f(x)|dx \leq \underbrace{\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)}_{cste} \times \underbrace{\|P_n - f\|_{\infty,[a,b]}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

On en déduit donc, en faisant tendre $n \to +\infty$, que $\int_a^b f^2(x)dx = 0$.

(c) Cela entraîne la nullité de f^2 sur $[a,b]$ (puisque f^2 est continue, positive et d'intégrale nulle), et donc la nullité de f.

6. (a) L'ensemble $F^\perp$ est formé des fonctions $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ qui vérifient $\displaystyle\int_a^b P(x)f(x)dx = 0$ pour tout fonction polynomiale P. D'après la question précécédente, seule la fonction nulle $f = 0$ vérifie cette condition. On a donc $F^\perp = \{0_E\}$.

   (b) On en déduit $F \oplus F^\perp = F$.
   Vu que $F \neq E$ (il existe des fonctions continues sur $[a,b]$ non polynomiales, par exemple $x \mapsto e^x$), on a donc $F \oplus F^\perp \neq E$.

7. (a) i. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n e^{-(1-i)x}$ est continue (à valeurs complexes) sur $[0,+\infty[$, et on a $\left|x^n e^{-(1-i)x}\right| = x^n e^{-x}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 \left|x^n e^{-(1-i)x}\right| = \lim_{x\to+\infty} x^{n+2}e^{-x} = 0$ par croissance comparée, ce qui montre que $|x^n e^{-(1-i)x}|$ est négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$, donc intégrable.
   Ceci montre que l'intégrale I_n est absolument convergente, donc convergente.

   ii. Ensuite, on fait une intégration par parties à partir de I_{n+1}, en dérivant $x \mapsto x^{n+1}$ et en intégrant $x \mapsto e^{-(1-i)x}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \int_0^{+\infty} x^{n+1}e^{-(1-i)x}dx = \left[\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}x^{n+1}\right]_0^{+\infty} + \frac{n+1}{1-i}\int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}dx,$$

   et ceci a du sens car $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\left[\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}x^{n+1}\right]_0^X = \lim_{X\to+\infty}\frac{e^{-(1-i)X}}{-(1-i)}X^{n+1}$ existe
   (en effet, $\displaystyle\left|\frac{e^{-(1-i)X}}{-(1-i)}X^{n+1}\right| = \frac{X^{n+1}e^{-X}}{\sqrt{2}} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).
   On obtient donc la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \dfrac{n+1}{1-i}I_n$.

   iii. On en déduit par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}$.
   En effet, c'est vrai pour $n = 0$ $\Big($puisque $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1-i)x}dx = \left[\frac{e^{-(1-i)x}}{-(1-i)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-i}\Big)$, et si pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on a $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}$, alors

$$I_{n+1} = \frac{n+1}{1-i}I_n = \frac{n+1}{1-i} \times \frac{n!}{(1-i)^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{(1-i)^{n+2}}.$$

   (b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^{+\infty} x^{4k}e^{-x}x^3\sin(x)dx = \int_0^{+\infty} Im\left(x^{4k+3}e^{-(1-i)x}\right)dx = Im(I_{4k+3}).$$

   Or, d'après les formules établies précédemment, $I_{4k+3} = \dfrac{(4k+3)!}{((1-i)^4)^{k+1}} = \dfrac{(4k+3)!}{(-4)^{k+1}} \in \mathbb{R}$, donc la partie imaginaire de I_{4k+3} est nulle. On en déduit la nullité de l'intégrale considérée.

   (c) Effectuons le changement de variable $u = x^4$ dans l'intégrale impropre convergente précédente. L'application $x \mapsto x^4$ est une bijection de classe C^1 de $]0;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$, donc

$$\int_0^{+\infty} x^{4k}e^{-x}x^3\sin(x)dx \underset{du=4x^3dx}{=} \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} u^k \sin(u^{1/4})e^{-u^{1/4}}du.$$

   En posant $f(u) = \sin(u^{1/4})e^{-u^{1/4}}$ pour tout $u \geq 0$, on définit une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0;+\infty[,\mathbb{R})$ qui est non nulle ($f(1) = \sin(1)e^{-1} \neq 0$ par exemple) et dont tous les moments sont nuls.

   Remarque
   Le théorème des moments montré à la question 5. ne se généralise donc pas aux intervalles non compacts.

(d) Supposons que f soit limite uniforme sur $[0;+\infty[$ d'une suite de polynômes (P_n).
Nous avons alors $\|P_n - f\|_{\infty,[0,+\infty[} \leq 1$ pour n supérieur à un certain rang $N \in \mathbb{N}$, ce qui implique

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in [0;+\infty[, \quad |P_n(x)| \leq 1 + |f(x)|$$

Mais la fonction limite f est elle-même bornée sur $[0;+\infty[$ (car elle est continue et tend vers 0 en $+\infty$, puisque $|f(u)| \leq e^{-u^{1/4}}$). On en déduit que pour tout $n \geq N$, le polynôme P_n est borné sur $[0;+\infty[$, donc constant (puisqu'un polynôme de degré ≥ 1 a une limite infinie en $+\infty$).
Ainsi, pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a (par convergence simple de (P_n) vers f) :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(0) = f(0),$$

ce qui entraîne que f est constante, et ceci est contradictoire ($f(1) \neq f(0)$ par exemple).
La fonction f n'est donc pas une limite uniforme de polynômes sur $[0;+\infty[$.

* * *

Exercice 2 : Décomposition de Dunford

Adapation du corrigé de J. Mirebeau

Partie I - Quelques exemples

1. Soit $A \in M_n(K)$.
   (a) $\boxed{\text{Si } A \text{ est diagonalisable, } (D,N) = (A,0)}$ est la décomposition de Dunford de A .
   En effet, $D = A$ est diagonalisable, $N = 0$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = A + 0 = D + N$.
   $\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, } (D,N) = (0,A)}$ est la décomposition de Dunford de A .
   En effet, $D = 0$ est diagonalisable, $N = A$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = 0 + A = D + N$.
   (b) Soit A une matrice trigonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ inversible et $T \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, telles que $P^{-1}AP = T$. Les matrices A et T sont semblables donc ont même polynôme caractéristique : $\chi_A = \chi_T$.
   Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ les coefficients diagonaux de la matrice T.
   Puisque T est triangulaire, $\chi_T(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Donc $\chi_A = \chi_T$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
   $\boxed{\text{Une matrice trigonalisable dans } M_n(\mathbb{K}) \text{ vérifie l'hypothèse du théorème}}$ donc admet une décomposition de Dunford.
   (c) Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   D' est diagonalisable (car diagonale), N' est nilpotente (car $(N')^2 = 0$), $A = D' + N'$, cependant D' et N' ne commutent pas :
$$D'N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq N'D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   $\boxed{\text{Non, } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ n'est pas la décomposition de Dunford de } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$ car ces deux matrices ne commutent pas. De plus, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ possède deux valeurs propres distinctes 1 et 2, donc est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$, donc $(D,N) = (A,0)$ est la décomposition de Dunford de A.
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.
   Supposons par l'absurde que A admet une décomposition de Dunford (D,N). D'après le théorème, on a de plus $\chi_A = \chi_D$.
   Puisque D est diagonalisable, D est semblable à une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Son polynôme caractéristique vaut $\chi_A(X) = \chi_D(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$. Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde.
   $\boxed{\text{La matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ n'admet pas de décomposition de Dunford dans } M_2(\mathbb{R}).}$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
   (a) Calculons son polynôme caractéristique, en développant par rapport à la deuxième colonne :
$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -8 \\ -3 & X+1 & -6 \\ 2 & 0 & X+5 \end{vmatrix} &= (X+1)\begin{vmatrix} X-3 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)(X^2 + 2X + 1) &= (X+1)^3. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X-1)^3.}$

(b) χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de l'énoncé, A admet une décomposition de Dunford. Soit (D, N) le couple de sa décomposition de Dunford.
D est diagonalisable et $\chi_D(X) = \chi_A(X) = (X+1)^3$ donc $\mathrm{Sp}(D) = \{-1\}$. D est semblable à la matrice diagonale avec des -1 sur sa diagonale, donc D est semblable à $-I_3$.
Ainsi $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$, $P^{-1}DP = -I_3$, d'où $D = P(-I_3)P^{-1} = -I_3$. On a $\boxed{D = -I_3}$, d'où

$$N = A - D = A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que (D, N) est la décomposition de Dunford de A (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

- (1) $A = D + N$.
- (2) $D = -I_3$ est diagonale donc diagonalisable.
- (3) Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0 = (A+I_3)^3 = N^3$ donc N est bien nilpotente. De plus :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 0.$$

  Donc N est nilpotente d'indice 2.
- (4) $D = -I_3$ est scalaire donc commute avec N : $DN = ND = -N$.

Ainsi $\boxed{\left(D = -I_3, N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.}$

4. (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.
Posons $P(X) = X(X-1)$. On a $P(A^2) = A^2(A^2 - I_n) = A^2(A - I_n)(A + I_n) = 0(A + I_n) = 0$.
Donc $\boxed{\text{le polynôme } X(X-1) \text{ annule la matrice } A^2.}$

(b) Le polynôme $X(X-1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ et annule A^2, donc
$\boxed{A^2 \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{K}).}$
Posons $D = A^2$ et $N = A - A^2$. Vérifions que (D, N) est la décomposition de Dunford de A :

- (1) $A = D + N$ par construction.
- (2) $D = A^2$ est diagonalisable.
- (3) $N^2 = (A - A^2)^2 = A^2(I_n - A)^2 = A^2(A - I_n)(A - I_n) = 0$ car $A^2(A - I_n) = 0$.
  $N^2 = 0$ donc N est nilpotente.
- (4) D et N sont des polynômes en A donc commutent : $DN = ND = A^3 - A^4$.

Donc $\boxed{(D = A^2, N = A - A^2) \text{ est la décomposition de Dunford de la matrice } A.}$

Partie II - Un exemple par deux méthodes

5. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(a) Calculons son polynôme caractéristique.
On effectue $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} &&= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & -1 \\ -1 & X-1 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} &&= (X-1)\Big((X-3)(X-1)+1\Big) \\
&= (X-1)(X^2 - 4X + 4) &&= (X-1)(X-2)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2.}$ Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1,2\}$. On a $\dim(\ker(A - I_3)) = 1$. Calculons $\dim(\ker(A - 2I_3))$.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(A - 3I_3)$ est de rang 2. Par le théorème du rang, $\dim(\ker(A - 3I_3)) = 1 < 2$. La dimension du sous-espace propre associé à 2 est strictement inférieure à la multiplicité de 2 en tant que valeur propre dans χ_A, donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } M_3(\mathbb{R}).}$

(b) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Par le théorème de Cayley-Hamilton, χ_u annule u, or $\chi_u(X) = (X-1)(X-2)^2$. Les polynômes $(X-1)$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux.

Par le lemme de décomposition des noyaux, $\boxed{\mathbb{R}^3 = \ker(\chi_u(u)) = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2.}$

6. (a) Calculons les noyaux des endomorphismes demandés.

$$\begin{aligned}
A - I_3 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. & \ker(A - I_3) &= \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\
A - 2I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. & \ker(A - 2I_3) &= \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\
(A - 2I_3)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. & \ker(A - 2I_3)^2 &= \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Posons alors

$$\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

P est la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique. Or $\det(P) = -1 \neq 0$ donc la famille(e_1, e_2, e_3) est libre et de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. $P \in GL_3(\mathbb{R})$ est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (e_1, e_2, e_3). De plus $\boxed{\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{vect}(e_1),\ \ker(u - 2\mathrm{id}) = \mathrm{vect}(e_2),\ \ker(u - 2\mathrm{id})^2 = \mathrm{vect}(e_2, e_3).}$

(b) Par construction, on a $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = 2e_2$. De plus

$$u(e_3) = Ae_3 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_2 + 2e_3.$$

Ecrivons la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{B = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

7. • Puisque A et B représentent la matrice du même endomorphisme u dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}$, on a la formule de changement de base $P^{-1}AP = B$ i.e. $A = PBP^{-1}$. De plus on obtient l'inverse de P en remarquant que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2 + e_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_3, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_3. \quad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

- Montrons que :

$$\boxed{\left(D_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}, N_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}.}$$

En effet : $B = D_1+N_1$; D_1 est diagonale donc diagonalisable ; $N_1^2 = 0$ donc N_1 est nilpotente ; D_1 et N_1 commutent car $D_1N_1 = N_1D_1 = 2N_1$.

- On pose $\boxed{D = PD_1P^{-1} \text{ et } N = PN_1P^{-1}.}$ Alors (D, N) est la décomposition de Dunford de A :

  ⋆ (1) $A = PBP^{-1} = P(D_1 + N_1)P^{-1} = PD_1P^{-1} + PN_1P^{-1} = D + N$.

  ⋆ (2) $D = PD_1P^{-1}$ est semblable à la matrice diagonale D_1 donc D est diagonalisable.

  ⋆ (3) $N^2 = (PN_1P^{-1})^2 = PN_1^2P^{-1} = 0$ donc N est nilpotente.

  ⋆ (4) D et N commutent car D_1 et N_1 commutent :

$$DN = (PD_1P^{-1})(PN_1P^{-1}) = P(D_1N_1)P^{-1} = P(N_1D_1)P^{-1} = (PN_1P^{-1})(PD_1P^{-1}) = ND.$$

Donc (D, N) est la décomposition de Dunford de A. Calculons ces matrices :

$$D = PD_1P^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

Puis :

$$N = PN_1P^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Finalement $\boxed{\left(D=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.}$

8. On décompose la fraction en éléments simples. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{(X-2)^2} = \frac{(a+b)X^2 + (c-b-4a)X + 4a - c}{(X-1)(X-2)^2}.$$

Par identification des coefficients,

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b &=& 0. \\ c-b-4a &=& 0. \\ 4a-c &=& 1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1. \\ b &=& -1. \\ c &=& 3. \end{array}\right.$$

Donc

$$\boxed{\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{-X+3}{(X-2)^2}.}$$

On en déduit par multiplication par $(X-1)(X-2)^2$: $\quad 1 = (X-2)^2 + (-X+3)(X-1)$.
Posons $\boxed{U(X) = -X+3, \quad V(X) = 1.}$
On a $\deg(U) = 1 < 2$, $\deg(V) = 0 < 1$ et $\boxed{(X-1)U(X) + (X-2)^2V(X) = 1.}$

9. (a) On pose $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{id})$.
On a obtenu à la question 8. la relation $U(X)(X-1) + V(X)(X-2)^2 = 1$. On évalue cette égalité en l'endomorphisme u :

$$p + q = U(u) \circ (u - \mathrm{id}) + V(u) \circ (u - 2\mathrm{id})^2 = 1(u) = \mathrm{id}.$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^3, \quad p(x) + q(x) = x.}$

(b) Posons $F = \ker(u - \mathrm{id})$ et $G = \ker(u - 2\mathrm{id})^2$.
Soit $x \in F$. Alors $(u - \mathrm{id})(x) = 0$, donc :

$$\begin{array}{rcl} q(x) & = & U(u) \circ (u - \mathrm{id})(x) = 0. \\ p(x) & = & p(x) + q(x) = \mathrm{id}(x) = x. \end{array}$$

Donc $\boxed{\forall x \in F,\ p(x) = x,\ q(x) = 0.}$
Soit $x \in G$. Alors $(u - \mathrm{id})^2(x) = 0$, donc :

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & V(u) \circ (u - 2\mathrm{id})^2(x) = 0. \\ q(x) & = & p(x) + q(x) = \mathrm{id}(x) = x. \end{array}$$

Donc $\boxed{\forall x \in G,\ p(x) = 0,\ q(x) = x.}$
Puisque $E = F \oplus G$, tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On obtient :

$$\begin{array}{rcccl} p(x) & = & p(x_F) + p(x_g) & = & x_F + 0 = x_F. \\ q(x) & = & q(x_F) + q(x_g) & = & 0 + x_G = x_G. \end{array}$$

On a montré que $\boxed{p \text{ est le projecteur sur } F = \ker(u - \mathrm{id}) \text{ parallèlement à } G = \ker(u - 2\mathrm{id})^2}$
et $\boxed{q \text{ est le projecteur sur } G = \ker(u - 2\mathrm{id})^2 \text{ parallèlement à } F = \ker(u - \mathrm{id}).}$

10. On pose $d = p + 2q$.

(a) Puisque $e_1 \in \ker(u - \mathrm{id})$, on a $p(e_1) = e_1$ et $q(e_1) = 0$. D'où $d(e_1) = p(e_1) + 2q(e_1) = e_1$.
Puisque $e_2 \in \ker(u-2\mathrm{id})^2$, on a $p(e_2) = 0$ et $q(e_2) = e_2$. D'où $d(e_2) = p(e_2)+2q(e_2) = 2e_2$.
De même, $e_2 \in \ker(u - 2\mathrm{id})^2$ donc $d(e_3) = 2e_3$.
On obtient la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d(e_1) & = & e_1. \\ d(e_2) & = & 2e_2. \\ d(e_3) & = & 2e_3. \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

(On retrouve la matrice D_1 de la décomposition de Dunford de B.)

(b) Or

$$\begin{array}{rclclcl} p & = & V(u) \circ (u - 2\mathrm{id})^2 & = & (X - 2)^2(u) & = & (X^2 - 4X + 4)(u) \\ q & = & U(u) \circ (u - \mathrm{id}) & = & ((-X + 3)(X - 1))(u) & = & (-X^2 + 4X - 3)(u). \\ d & = & p + 2q & = & \Big((X^2 - 4X + 4) + 2(-X^2 + 4X - 3)\Big)(u) & = & (-X^2 + 4X - 2)(u). \end{array}$$

Donc $d = (-X^2 + 4X - 2)(u)$ et $D = (-X^2 + 4X - 2)(A) = -A^2 + 4A - 2I$.
Enfin $N = A - D = A^2 - 3A + 2I$.
Donc $\boxed{(D = -A^2 + 4A - 2I, N = A^2 - 3A + 2I) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.}$
Effectuons les calculs :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A & = & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \\ A^2 & = & \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 7 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{rclcl} D & = & -A^2 + 4A - 2I & = & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \\ N & = & A^2 - 3A + 2I & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

On retrouve le même résultat qu'à la question 7.

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

11. (a) Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ une valeur propre de u et $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$. Puisque u et v commutent :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$

D'où $v(x) \in E_\lambda(u)$. On a montré que $\forall x \in E_\lambda(u), v(x) \in E_\lambda(u)$. Donc $E_\lambda(u)$ est stable par v.
$\boxed{\text{Tout sous-espace propre de } u \text{ est stable par } v.}$

(b) Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.
On note $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ les valeurs propres de u deux à deux distinctes.
Pour $i \in [\![1, p]\!]$, $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v. Notons v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.
Puisque v est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé à racines simples qui annule v, alors P annule également v_i donc v_i est diagonalisable. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(u)$ formée de vecteurs propres de v_i, alors ce sont des vecteurs propres de v. De plus $\mathcal{B}_i$ est aussi formée de vecteurs propres de u car $\forall x \in E_{\lambda_i}(u), u(x) = \lambda_i x$.
Puisque u est diagonalisable, E se décompose en somme directe des sous-espaces propres de u :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u).$$

$\mathcal{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}(u)$ donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E, formée de vecteurs propres de u et de v.
$\boxed{\text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ commune de diagonalisation de } u \text{ et } v.}$

12. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
D'après la question 11., il existe une base commune $\mathcal{B}$ de diagonalisation pour les endomorphismes associés. Donc il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$, qui est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}$, telle que $P^{-1}AP = D_1$ et $P^{-1}BP = D_2$ soient deux matrices diagonales.
Alors $P^{-1}(A-B)P = P^{-1}AP - P^{-1}BP = D_1 - D_2$ est diagonale, donc $A - B$ est diagonalisable.
$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont deux matrices diagonalisables de } M_n(\mathbb{K}) \text{ qui commutent, alors } A - B \text{ est diagonalisable.}}$

13. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
On suppose que A est nilpotente d'indice p et que B est nilpotente d'indice q. On a $A^p = 0$ et $B^q = 0$.
Puisque A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(A - B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k (-1)^{p+q-1-k} B^{p+q-1-k}.$$

Si $k \geq p$, alors $A^k = 0$.
Sinon, on a $k \leq p - 1$, donc $p + q - 1 - k \geq q$, d'où $B^{p+q-1-k} = 0$.
On en déduit que tous les termes de la somme sont nuls, donc $\boxed{(A - B)^{p+q-1} = 0}$ et $A - B$ est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à $p + q - 1$.
$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont deux matrices nilpotentes de } M_n(\mathbb{K}) \text{ qui commutent, alors } A - B \text{ est nilpotente.}}$

14. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ à la fois diagonalisable et nilpotente.
Puisque A est nilpotente, 0 est la seule valeur propre de A. Puisque A est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, A est semblable à la matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{C})$ comprenant des 0 sur la diagonale. Donc $D = 0$ et A est semblable donc égale à la matrice nulle. Ainsi $A = 0$.
Réciproquement, la matrice nulle est diagonalisable et nilpotente.
$\boxed{\text{La seule matrice de } M_n(\mathbb{K}) \text{ à la fois diagonalisable et nilpotente est la matrice nulle.}}$

15. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On admet l'existence de la décomposition de Dunford. Montrons l'unicité.
Soient (D, N) et (D', N') deux couples qui conviennent. $A = D + N = D' + N'$, avec D, D' diagonalisables, N, N' nilpotentes, $DN = ND$, $D'N' = N'D'$. De plus D et N sont des polynômes en A.

D' commute avec N', donc avec $A = D' + N'$. Alors D' commute avec tout polynôme en A, donc D' commute avec D.
De même, N' commute avec D', donc avec $A = D' + N'$. Alors N' commute avec tout polynôme en A, donc N' commute avec N.
On a $D - D' = N' - N$.
D et D' sont diagonalisables et commutent. D'après la question 12., $D - D'$ est diagonalisable.
N et N' sont nilpotents et commutent. D'après la question 13., $N' - N$ est nilpotente.
$D - D' = N' - N$ est à la fois diagonalisable et nilpotente. D'après la question 14., cette matrice est la matrice nulle.
On en déduit que $D - D' = N' - N = 0$, d'où $D = D'$ et $N = N'$.
$\boxed{\text{Il y a unicité du couple } (D, N) \text{ dans la décomposition de Dunford.}}$

* * *