DS07 du 13/12/2025 (4h)
Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 2 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Autour du théorème de Weierstrass

Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On rappelle le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a,b]$: si f est une fonction continue sur $[a,b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème.

Partie I. Exemples et contre-exemples

1. Enoncer le théorème de la double limite en 0^+ pour une suite de fonctions $f_n :]0,1] \to \mathbb{R}$.
2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,1]$ par : $\forall x \in]0,1],\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
   (a) En utilisant le théorème de la double limite, montrer que h n'est pas limite uniforme d'une suite de polynômes sur $]0,1]$.
   (b) Analyser ce résultat par rapport au théorème de Weierstrass.
3. Soit N entier naturel non nul, on note $\mathscr{P}_N$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[a,b]$, de degré inférieur ou égal à N.
   (a) Justifier que $\mathscr{P}_N$ est une partie fermée de l'espace des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.
   (b) Que peut-on dire d'une fonction qui est limite uniforme sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes de degré inférieur ou égal à un entier donné ?
4. Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.

   Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbb{R}[X]$ ainsi :

   $$\text{pour tout polynôme } P \text{ de } \mathbb{R}[X],\ N_1(P) = \sup_{x\in[-2,-1]} |P(x)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{x\in[1,2]} |P(x)|.$$

   (a) Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admettra que N_2 en est également une.
   (b) On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2,2]$ ainsi :

   $$\text{pour tout } x \in [-2,-1], f(x) = x^2,\ \text{pour tout } x \in [-1,1], f(x) = 1 \text{ et pour tout } x \in [1,2], f(x) = x^3.$$

   i. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2,2]$.
   ii. Justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2,2]$.
   iii. Démontrer que cette suite de polynômes (P_n) converge dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_2.

Partie II. Application : un théorème des moments

5. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, avec $a < b$. On suppose que pour tout entier naturel k,

$$\int_a^b x^k f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

$\left(\text{on dit que } \displaystyle\int_a^b x^k f(x)\mathrm{d}x \text{ est le moment d'ordre } k \text{ de } f \text{ sur } [a,b]\right)$.

   (a) Si P est une fonction polynôme, que vaut l'intégrale $\displaystyle\int_a^b P(x)f(x)\mathrm{d}x$?

   (b) Démontrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$.

   (c) Qu'en déduire sur f ?

6. *Application : calcul d'un orthogonal*
   Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini pour tout couple (f, g) d'éléments de E par $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   On note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes définies sur $[a, b]$.
   (a) Déterminer $F^\perp$.
   (b) A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

7. *Etude d'un contre-exemple*
   (a) Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-(1-i)x}\mathrm{d}x$.
      i. Montrer l'existence de ces intégrales
      ii. Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n.
      iii. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}$.

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel k, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{4k}\mathrm{e}^{-x}x^3 \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

   (c) Proposer une fonction f continue sur $[0, +\infty[$, non nulle et vérifiant :

$$\text{pour tout entier naturel } k, \int_0^{+\infty} u^k f(u)\mathrm{d}u = 0.$$

   (d) Expliquer pourquoi la fonction proposée à la question précédente ne peut être uniformément approchée sur $[0, +\infty[$ par une suite de polynômes.

* * *

Exercice 2 : Décomposition de Dunford

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

Théorème 1
Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :

(1) $A = D + N$;

(2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;

(3) N est nilpotente ;

(4) $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
Le couple (D, N) s'appelle la **décomposition de Dunford** *de A.*

Partie I - Quelques exemples

1. (a) Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.

   (b) Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.

   (c) Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

2. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer son polynôme caractéristique χ_A.

   (b) Donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

   (a) Justifier que le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice A^2.

   (b) Démontrer que le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

5. (a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?

   (b) Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2$.

6. (a) Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :
   $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_1\},\ \ker(u - 2\mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_2\},\ \ker(u - 2\mathrm{id})^2 = \mathrm{vect}\{e_2, e_3\}$.

   (b) Ecrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

7. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

8. Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :
$$(X-1)U(X)+(X-2)^2V(X)=1 \text{ avec } \deg(U)<2 \text{ et } \deg(V)<1.$$
9. On pose les endomorphismes : $p=V(u)\circ(u-2\mathrm{id})^2$ et $q=U(u)\circ(u-\mathrm{id})$.
   (a) Calculer $p(x)+q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Démontrer que p est le projecteur sur $\ker(u-\mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(u-2\mathrm{id})^2$ et q est le projecteur sur $\ker(u-2\mathrm{id})^2$ parallèlement à $\ker(u-\mathrm{id})$.
10. On pose $d=p+2q$.
   (a) Ecrire la matrice de d dans la base (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question **6**).
   (b) Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.
On note $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1\leq i\leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.
   (a) Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
   (b) En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.
   Indication : pour tout $1\leq i\leq p$, on pourra considérer v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.
12. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A-B$ est diagonalisable.
13. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A-B$ est nilpotente.
14. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.
15. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D,N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A.
Etablir l'unicité du couple (D,N) dans la décomposition de Dunford.

* * *