Corrigé du DS07 du 13/12/2025 (4h)
Sujet A (MPI*)

Exercice 1 : Approximation uniforme de fonctions périodiques

Partie I : Préliminaires

1. La fonction $\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f(x - \lfloor x \rfloor) \end{array} \right.$ est bien définie car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$.
   Elle est également périodique car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\tilde{f}(x+1) = f(x+1-\lfloor x+1 \rfloor) = f(x+1-\lfloor x \rfloor - 1) = f(x - \lfloor x \rfloor) = \tilde{f}(x).$$

   Montrons enfin que $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$: la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est continue en tout point $a \notin \mathbb{Z}$, donc par composition et continuité de $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, la fonction $\tilde{f}$ est continue en tout point $a \notin \mathbb{Z}$. Montrons que $\tilde{f}$ est également continue en tout point entier : si $a \in \mathbb{Z}$, alors par continuité de f en 0 et 1 :

$$\forall x \in]a, a+1[, \qquad \tilde{f}(x) = f(x-a) \underset{x \to a^+}{\to} f(0) = \tilde{f}(a),$$

$$\forall x \in]a-1, a[, \qquad \tilde{f}(x) = f(x-a+1) \underset{x \to a^-}{\to} f(1) = f(0) = \tilde{f}(a),$$

   donc $\tilde{f}$ est bien continue en a.
   Finalement, $\tilde{f}$ est périodique et continue sur $\mathbb{R}$, donc $\tilde{f} \in \mathcal{C}_{per}$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}_{per}$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est uniformément continue sur tout segment (d'après le théorème de Heine). Fixons un réel $\varepsilon > 0$ et appliquons le théorème de Heine sur un segment qui couvre **strictement plus** qu'une période, par exemple $[0, 2]$ (deux périodes). Il existe donc un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall (u, v) \in [0, 2]^2, \qquad |u - v| \leq \delta \implies |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon.$$

   Montrons alors que le réel $\delta' = \min(\delta, 1) > 0$ convient à tous les couples de réels : soit x, y deux réels tels que $|x - y| \leq \delta'$. On peut supposer $x \leq y$ sans perte de généralité, donc $0 \leq y - x \leq \delta'$. Par périodicité de f, on a $f(t + a) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $a \in \mathbb{Z}$, donc

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - \lfloor x \rfloor) - f(y - \lfloor x \rfloor)|.$$

   Mais $0 \leq x - \lfloor x \rfloor \leq y - \lfloor x \rfloor \leq x + \delta' - \lfloor x \rfloor < 1 + \delta' \leq 2$, donc $u = x - \lfloor x \rfloor$ et $v = y - \lfloor x \rfloor$ sont dans $[0, 2]$ et vérifient $|u - v| = |x - y| \leq \delta' \leq \delta$, ce qui permet de déduire

$$|f(x - \lfloor x \rfloor) - f(y - \lfloor x \rfloor)| \leq \varepsilon.$$

   Ainsi, on a bien $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pour tous réels x, y tels que $|x - y| \leq \delta'$, ce qui montre la continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}$.

3. Lemme de Cesàro, exercice très classique (voir exercices MP2I pour une démonstration directe, ou alors voir CH1 MPI pour une démonstration à partir du théorème de sommation des relations de comparaison).

Partie II : Théorème de Fejér et applications

4. Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$\int_0^1 e_k = \int_0^1 e^{2i\pi kx} dx = \left[\frac{e^{2i\pi kx}}{2i\pi k} \right]_0^1 = 0$$

(par périodicité de l'exponentielle complexe), et pour $k=0$, $\int_0^1 e_0 = \int_0^1 dx = 1$, donc

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \int_0^1 e_k = \delta_{k,0}.$$

On déduit par linéarité de l'intégrale que pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 K_N(y)dy = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n}\delta_{k,0} = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} 1 = 1.$$

5. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ (ainsi, $e^{2i\pi x} \neq 1$). Pour tout $n \in [\![0,N]\!]$, la somme $\sum_{k=-n}^{n} e_k(x)$ est géométrique de raison $q = e^{2i\pi x}$, donc

$$\sum_{k=-n}^{n} e_k(x) = \sum_{k=-n}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{2n} q^{k-n} = q^{-n}\sum_{k=0}^{2n} q^k = q^{-n} \times \frac{1-q^{2n+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1}{1-q}\left(q^{-n} - q^{n+1}\right),$$

donc en resommant :

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e_k(x) = \frac{1}{1-q}\left(\sum_{n=0}^{N}(q^{-1})^n - q\sum_{n=0}^{N} q^n\right) = \frac{1}{1-q}\left(\frac{1-q^{-N-1}}{1-q^{-1}} - \frac{q(1-q^{N+1})}{1-q}\right)$$

$$= \frac{1}{1-q}\left(\frac{q-q^{-N}}{q-1} + \frac{q^{N+2}-q}{1-q}\right) = \frac{q^{N+2}-2q+q^{-N}}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2}(q^{N+1} - 2 + q^{-(N+1)}).$$

Il reste à expliciter les termes :

$$q^{N+1}-2+q^{-(N+1)} = e^{i\frac{N+1}{2}\pi x} - 2 + e^{-i\frac{N+1}{2}\pi x} = \left(e^{i(N+1)\pi x} - e^{-i(N+1)\pi x}\right)^2 = -4\sin^2((N+1)\pi x);$$

$$\frac{q}{(1-q)^2} = \frac{e^{i2\pi x}}{(1-e^{i2\pi x})^2} = \left(\frac{e^{i\pi x}}{1-e^{i2\pi x}}\right)^2 = \left(\frac{1}{e^{-i\pi x}-e^{i\pi x}}\right)^2 = \left(\frac{1}{-2i\sin(\pi x)}\right)^2 = -\frac{1}{4\sin^2(\pi x)}.$$

D'où le résultat :

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} e_k(x) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2.$$

Remarque
L'intérêt de ce calcul pénible est de montrer notamment que K_N est **positive**.

6. On fixe $f \in \mathcal{C}_{per}$, $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Par définition de $\sigma_N(f)$ et linéarité de l'intégrale, on a :

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k(x)$$

$$= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_0^1 f(y)e_{-k}(y)dy\right)e_k(x)$$

$$= \int_0^1 f(y)\left(\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n}\underbrace{e_k(x)e_{-k}(y)}_{=e_k(x-y)}\right)dy = \int_0^1 f(y)K_N(x-y)dy.$$

Remarque
On reconnaît là un produit de convolution sur le segment $[0,1]$ *:* $\sigma_N(f) = f * K_N$.

(b) Puisque $\int_0^1 K_N(y)dy = 1$, on a $f(x) = \int_0^1 f(x)K_N(y)dy$ donc d'après la question précédente :

$$\sigma_N(f)(x) - f(x) = \int_0^1 f(y)K_N(x-y)dy - \int_0^1 f(x)K_N(y)dy.$$

En effectuant le changement de variable $z = x - y$ dans la première intégrale, on obtient

$$\int_0^1 f(y)K_N(x-y)dy = \int_{x-1}^x f(x-z)K_N(z)dz.$$

Mais la fonction $z \mapsto f(x-z)K_N(z)$ est périodique, donc

$$\int_{x-1}^x f(x-z)K_N(z)dz = \int_0^1 f(x-z)K_N(z)dz$$

(l'intégrale est la même sur n'importe quelle période). Finalement, on obtient :

$$\sigma_N(f)(x)-f(x) = \int_0^1 f(x-y)K_N(y)dy - \int_0^1 f(x)K_N(y)dy = \int_0^1 (f(x-y)-f(x))K_N(y)dy.$$

7. Soit $f \in \mathcal{C}_{per}$.

(a) On fixe un réel $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue et périodique donc uniformément continue (cf 2.), d'où l'existence d'un réel $\delta > 0$ (que l'on peut supposer $< 1/2$ quitte à le diminuer) tel que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \qquad |u-v| \leq \delta \implies |f(u)-f(v)| \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in [0,\delta]$, $|(x-y)-x| = |y| \leq \delta$, donc $|f(x-y)-f(x)| \leq \varepsilon$, ce qui permet de majorer l'intégrale proposée :

$$\int_0^\delta |f(x-y)-f(x)|K_N(y)dy \leq \int_0^\delta \varepsilon K_N(y)dy \leq \varepsilon \int_0^1 K_N(y)dy = \varepsilon.$$

(n'oublions pas que $K_N \geq 0$). En outre, par périodicité de $y \mapsto |f(x-y)-f(x)|K_N(y)$, on a avec le changement de variable $y \leftarrow y-1$:

$$\int_{1-\delta}^1 |f(x-y)-f(x)|K_N(y)dy = \int_{-\delta}^0 |f(x-y)-f(x)|K_N(y)dy$$

donc on obtient de même

$$\int_{1-\delta}^1 |f(x-y)-f(x)|K_N(y)dy \leq \int_{1-\delta}^1 \varepsilon K_N(y)dy \leq \varepsilon \int_0^1 K_N(y)dy = \varepsilon$$

(puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in [-\delta, 0]$, on a $|(x-y)-x| = |y| \leq \delta$ donc $|f(x-y)-f(x)| \leq \varepsilon$ comme dans le cas précédent).

(b) Fixons un réel $\delta > 0$. Pour $x \in [\delta, 1-\delta] \subset]0,1[$, on a $0 < \pi\delta \leq \pi x \leq \pi(1-\delta) < \pi$, donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin^2(\pi x)}$ est continue sur $[\delta, 1-\delta]$ ($\sin(\pi x)$ ne s'y annule pas). On peut donc facilement majorer l'intégrale proposée :

$$\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y)-f(x)|K_N(y)dy \leq \frac{2\|f\|_\infty}{N+1}\int_\delta^{1-\delta} \frac{\sin^2((N+1)\pi y)}{\sin^2(\pi y)}dy \leq \frac{2\|f\|_\infty}{N+1}\int_\delta^{1-\delta} \frac{dy}{\sin^2(\pi y)}.$$

En posant $\kappa_{\delta,f} = 10^{-10} + 2\|f\|_\infty \int_\delta^{1-\delta} \frac{dy}{\sin^2(\pi y)} > 0$ (qui ne dépend bien que de δ et de f), on obtient la majoration souhaitée :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \int_\delta^{1-\delta} |f(x-y)-f(x)|K_N(y)dy \leq \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1}.$$

(c) Montrons le théorème de Fejér, c'est-à-dire la convergence uniforme de $(\sigma_N(f))$ vers f sur $\mathbb{R}$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on choisir un réel $0 < \delta < \frac{1}{2}$ vérifiant la propriété de la question 7.(a). D'après la formule obtenue en 6.(a) et la positivité de K_N :

$$\forall (N,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad |\sigma_N(f)(x) - f(x)| = \left| \int_0^1 (f(x-y) - f(x)) K_N(y) dy \right|$$

$$\leq \int_0^1 |f(x-y) - f(x)| K_N(y) dy = \int_0^\delta |f(x-y) - f(x)| K_N(y) dy + \int_\delta^{1-\delta} (\cdots) + \int_{1-\delta}^1 (\cdots).$$

Les questions 7.(a) et 7.(b) donnent donc la majoration :

$$\forall (N,x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}, \quad |\sigma_N(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon + \frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1}.$$

Or, $\frac{\kappa_{\delta,f}}{N+1} \underset{N \to +\infty}{\to} 0$ donc il existe un entier $N_0 \geq 1$ tel que

$$N \geq N_0 \implies \forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sigma_N(f)(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon \implies \|\sigma_N(f) - f\|_\infty \leq 3\varepsilon.$$

On conclut que $\|\sigma_N(f) - f\|_\infty \underset{N \to +\infty}{\to} 0$ donc $(\sigma_N(f))$ converge uniformément vers f.

8. Soit $f \in \mathcal{C}_{per} \cap \mathcal{C}^\infty$.

(a) Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$c_k(f^{(n)}) = \int_0^1 f^{(n)}(y) e_{-k}(y) dy = \int_0^1 f^{(n)}(y) e^{-2i\pi ky} dy.$$

En effectuant une intégration par parties, on obtient

$$c_k(f^{(n)}) = \left[f^{(n-1)}(y) e^{-2i\pi ky} \right]_0^1 - (-2i\pi k) \int_0^1 f^{(n-1)}(y) e^{-2i\pi ky} dy.$$

Le crochet est nul par périodicité de $y \mapsto f^{(n-1)}(y) e^{-2i\pi ky}$, d'où la formule :

$$c_k(f^{(n)}) = (2i\pi k) c_k(f^{(n-1)}).$$

On en déduit par récurrence simple la relation :

$$c_k(f^{(n)}) = (2i\pi k)^n c_k(f).$$

(b) D'après la question précédente appliquée avec $n = 2$:

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \qquad c_k(f) = -\frac{1}{4\pi^2 k^2} c_k(f'') = -\frac{1}{4\pi^2 k^2} \int_0^1 f''(y) e^{-2i\pi ky} dy,$$

donc

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \qquad |c_k(f)| \leq \frac{1}{4\pi^2 k^2} \int_0^1 |f''|.$$

On en déduit par comparaison de familles à termes positifs que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(f)| = |c_0(f)| + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |c_k(f)| \leq |c_0(f)| + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{\|f''\|_1}{4\pi^2 k^2} = 1 + \frac{\|f''\|_1}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty,$$

donc $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

(c) Montrons enfin que $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (résultat qui améliore le théorème de Fejér puisque dans ce cas on a directement la CVU de $(S_n(f))$, pas besoin de reprendre la moyenne de Cesàro $(\sigma_N(f))$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e_k = c_0(f) + \sum_{k=1}^{n} (c_k(f) e_k + c_{-k}(f) e_{-k}),$$

et cette série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$ puisque

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|x \mapsto c_k(f)e_k(x) + c_{-k}(f)e_{-k}(x)\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{+\infty}(|c_k(f)| + |c_{-k}(f)|) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)| < +\infty$$

donc la suite $(S_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, vers une fonction notée $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
A fortiori, la suite $(S_n(f))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers g, donc la moyenne de Cesàro $(\sigma_N(f))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers g (d'après la question 3.)
Mais d'après le théorème de Fejér (cf. 7), la suite $(\sigma_N(f))$ converge uniformément, donc simplement vers f. Par unicité de la limite simple, on en déduit que $g = f$, donc finalement, $(S_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

Remarque

Résultat très important dans la théorie des séries de Fourier : pour toute fonction périodique de classe $\mathcal{C}^\infty$, la série de Fourier $S_n(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

* * *

Exercice 2 : Endomorphismes cycliques

Partie I : Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

1. M et M^T ont même polynôme caractéristique car pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a

$$\chi_M(x) = \det(xI_n - M) = \det((xI_n - M)^T) = \det(xI_n - M^T) = \chi_{M^T}(x).$$

Puisque $sp(M)$ est l'ensemble des racines dans $\mathbb{K}$ de χ_M, on en déduit que $sp(M) = sp(M^T)$.

2. Si M est diagonalisable, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale telles que $P^{-1}MP = D$. En transposant, on obtient

$$D^T = P^T M^T (P^{-1})^T = Q^{-1} M^T Q,$$

où $Q = (P^{-1})^T = (P^T)^{-1}$ est inversible et $D^T = D$ est diagonale, donc M^T est diagonalisable. En réappliquant ce raisonnement à M^T, on obtient que si M^T est diagonalisable, alors $(M^T)^T = M$ aussi. On a donc M^T diagonalisable si et seulement si M diagonalisable.

3. Soit $\lambda \in sp(C_Q^T) = sp(C_Q)$ (donc une racine de Q dans $\mathbb{K}$), soit $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)^T$ un vecteur colonne de $\mathbb{K}^n$. On résout :

$$C_Q^T X = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ (\underbrace{a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n}_{=Q(\lambda)=0}) x_1 = 0 \end{cases} \iff X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que le sous-espace propre $E_\lambda = Ker(C_Q^T - \lambda I_n)$ est de dimension 1, et a pour base le vecteur $(1, \lambda, \cdots, \lambda^{n-1})$.

4. L'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique si et seulement s'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B}_{x_0} = (x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0)) = (e_0, \cdots, e_{n-1})$ est une base de E. Dans toute base $\mathcal{B}_{x_0}$ de ce type, on a $f(e_i) = e_{i+1}$ pour tout $0 \leq i < n-1$ et $f(e_{n-1}) \in Vect(e_0, \cdots, e_{n-1})$, donc

$$Mat_{\mathcal{B}_{x_0}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & b_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & b_{n-1} \end{pmatrix},$$

où $(b_0, \cdots, b_{n-1})$ sont les coordonnées du vecteur $f(e_{n-1}) = f^n(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}_{x_0}$.
Ainsi, tout endomorphisme cyclique se représente par une matrice du type C_Q (en posant $a_i = -b_i$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$).
Réciproquement, s'il existe une base $\mathcal{B} = (e_0, \cdots, e_{n-1})$ de E dans laquelle la matrice de f est C_Q, alors par lecture des colonnes de C_Q, on a $f(e_0) = e_1, \cdots, f(e_{n-2}) = e_{n-1}$, donc $\mathcal{B} = (e_0, f(e_0), \cdots, f^{n-1}(e_0))$, ce qui montre que f est cyclique.
On a ainsi l'équivalence voulue.

5. Soit f un endomorphisme cyclique. D'après la question précédente il se représente dans une base par une matrice du type C_Q. Ainsi, f est diagonalisable ssi C_Q est diagonalisable, ce qui équivaut d'après la question 2. à C_Q^T diagonalisable. En utilisant les résultats de la question 3.,

C_Q^T est diagonalisable ssi elle possède n sous-espaces propres distincts (puisqu'ils sont tous de dimension 1), ce qui revient à dire que $\chi_{C_Q^T}$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.
Mais d'après la question 1., $\chi_{C_Q^T} = \chi_{C_Q} = \chi_f$, donc finalement, f est diagonalisable ssi χ_f est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

6. Supposons f cyclique et fixons $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
   - Montrons alors que la famille $(Id_E, f, \cdots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$: si $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ avec les $\alpha_k \in \mathbb{K}$, alors en évaluant en x_0 on obtient $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0) = 0_E$, ce qui entraîne $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$ car $(f^{(k)}(x_0))_{0 \leq k \leq n-1}$ est libre par hypothèse.
   - Notons $\pi_f = X^d + \alpha_{d-1}X^{d-1} + \cdots + \alpha_0 \in \mathbb{K}[X]$ le polynôme minimal de f, de degré $d \in \mathbb{N}^*$. Puisque $\pi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on a $f^d = -\alpha_{d-1}f^{d-1} - \cdots - a_0 Id_E$, donc la famille $(Id_E, f, \cdots, f^d)$ est liée dans $\mathcal{L}(E)$, ce qui impose $d \geq n$ d'après le point précédent (qui implique que toute sous-famille de $(Id_E, f, \cdots, f^{n-1})$ est libre). Ainsi, $\deg(\pi_f) \geq n$, mais χ_f est annulateur de f (théorème de Cayley-Hamilton) de degré n, donc on a aussi $\deg(\pi_f) \leq n$. Finalement, $\deg(\pi_f) = n = \dim(E)$.

   Remarque
   On a en fait $\pi_f = \chi_f$ (puisque π_f divise χ_f en général, et ces deux polynômes sont unitaires et de même degré ici).

Partie II : Etude des endomorphismes cycliques

7. Si f est nilpotent d'indice $r \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout vecteur x_0 tel que $f^{r-1}(x_0) \neq 0_E$ (qui existe car f^{r-1}), la famille $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{r-1}(x_0))$ est libre (exercice ultra classique, à savoir refaire impérativement, et donc $r \leq n$ au passage). Ainsi :
   - si $r = n$, alors en choisissant un tel vecteur x_0, on a $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ libre et de cardinal n, donc c'est une base de E, ce qui montre que f est cylique.
   - si $1 \leq r < n$, alors pour tout vecteur $x \in E$, la famille $(x, f(x), \cdots, f^{n-1}(x))$ est liée, puisqu'elle contient le vecteur $f^r(x) = 0_E$, donc f n'est pas cyclique, puisqu'il n'existe pas de base de E du type voulu.

   On a donc bien f cyclique ssi $r = n$. Dans ce cas, la matrice compagnon est $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (puisque $f(f^{n-1}(x_0)) = f^n(x_0) = 0_E$).

8.
   - Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$, le SEV $Ker(Q(f))$ est stable par f : en effet f commute avec $Q(f)$ donc :
   $$x \in Ker(Q(f)) \implies Q(f)(f(x)) = f(Q(f)(x)) = f(0_E) = 0_E \implies f(x) \in Ker(Q(f)).$$
   En appliquant ceci aux polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$, on obtient que pour tout $1 \leq k \leq p$, le sous-espace caractéristique $F_k = Ker((f - \lambda_k Id_E)^{m_k})$ est stable par f.
   - Les polynômes $(X - \lambda_1)^{m_1}, \cdots, (X - \lambda_p)^{m_p}$ sont premiers entre eux deux à deux dans $\mathbb{K}[X]$ (puisqu'ils n'ont aucune racine complexe commune), donc d'après le lemme des noyaux :
   $$F_1 \oplus \cdots \oplus F_p = \bigoplus_{k=1}^{p} Ker((f - \lambda_k Id_E)^{m_k}) = Ker\left(\prod_{k=1}^{p} (f - \lambda_k Id_E)^{m_k}\right) = Ker(\chi_f(f)).$$
   Mais d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc
   $$F_1 \oplus \cdots \oplus F_p = Ker(0_{\mathcal{L}(E)}) = E.$$

9. Pour $1 \leq k \leq p$, l'endomorphisme induit $\varphi_k = (f - \lambda_k Id_E)_{F_k}$ vérifie :
$$\forall x \in F_k, \quad \varphi_k^{m_k}(x) = (f - \lambda_k Id_E)^{m_k}(x) = 0_E,$$
(par définition du noyau F_k), donc $\varphi_k^{m_k} = 0_{\mathcal{L}(F_k)}$, ce qui montre que φ_k est nilpotent.
10. Comme expliqué dans la question 7., l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K} - ev$ G est toujours inférieur ou égal à la dimension de G. En appliquant ce raisonnement à l'induit $\varphi_k \in \mathcal{L}(F_k)$ (qui est nilpotent d'indice ν_k), on obtient $\nu_k \leq \dim(F_k)$.
11. On a supposé que la famille $(Id_E, f, \cdots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$. Comme montré dans la question 6., cela entraîne que le polynôme minimal de f est son polynôme caractéristique, c'est-à-dire $\pi_f = \chi_f = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)^{m_k}$.
En outre, puisque ν_k est l'indice de nilpotence de φ_k, on a $\pi_{\varphi_k} = X^{\nu_k}$ donc $\pi_{f_{F_k}} = (X - \lambda_k)^{\nu_k}$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ (en effet, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(X)$ annule l'induit f_{F_k} ssi $Q(X + \lambda_k)$ annule $\varphi_k = f_{F_k} - \lambda_k Id_{F_k}$). Vu que $\pi_{f_{F_k}}$ divise $\pi_f = \chi_f$, on obtient que $(X - \lambda_k)^{\nu_k}$ divise χ_f, donc $\nu_k \leq m_k$.
Enfin, le polynôme $\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)^{\nu_k}$ annule f, car chaque facteur $(X - \lambda_k)^{\nu_k}$ annule l'induit f_{F_k} et les F_k sont supplémentaires dans E. Donc $\chi_f = \pi_f$ divise $\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)^{\nu_k}$ ce qui amène $m_k \leq \nu_k$, et donc finalement $m_k = \nu_k$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$.
12.
    - Les questions 10. et 11. donnent $m_k = \nu_k \leq \dim(F_k)$ pour tout $1 \leq k \leq p$. Mais on a aussi
$$\sum_{k=1}^{p} m_k = \deg(\chi_f) = n = \dim(E) = \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k),$$
(puisque les F_k sont supplémentaires dans E) donc $0 = \sum_{k=1}^{p}\underbrace{(\dim(F_k) - m_k)}_{\geq 0}$, et cette somme nulle de réels positifs entraîne $\dim(F_k) = m_k$ pour tout $1 \leq k \leq p$.
    - Pour tout $1 \leq k \leq p$, l'endomorphisme $\varphi_k \in \mathcal{L}(F_k)$ est nilpotent d'indice $\nu_k = m_k = \dim(F_k)$, donc est cyclique par la question 7. : il existe donc une base $\mathcal{B}_k$ de F_k telle que
$$Mat_{\mathcal{B}_k}(\varphi_k) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
donc
$$Mat_{\mathcal{B}_k}(f_{F_k}) = Mat_{\mathcal{B}_k}(\varphi_k + \lambda_k Id_{F_k}) = \begin{pmatrix} \lambda_k & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_k & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix} = J_k \in \mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C}).$$
Puisque $F_1, \cdots, F_p$ sont supplémentaires dans E et stables par f, on obtient en concaténant $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ une base $\mathcal{B} = (u_1, \cdots, u_n)$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme voulue :
$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} J_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_p \end{pmatrix}.$$

Remarque
Encore un exemple de réduction de Jordan...

13. Le vecteur proposé par l'énoncé est $x_0 = y_1 + y_2 + \cdots + y_p$ avec
$$y_1 = u_1 \in F_1, \quad y_2 = u_{m_1+1} \in F_2, \quad \cdots \quad y_p = u_{m_1+\cdots+m_{p-1}+1} \in F_p$$
(ce sont les premiers vecteurs des bases $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ précédemment construites). Pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, on a
$$Q(f)(x_0) = Q(f)(y_1) + \cdots + Q(f)(y_p)$$
avec chaque $Q(f)(y_k)$ dans chaque F_k (puisque F_k est stable par f, il est stable par $Q(f)$). Vu que $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe, on a donc
$$Q(f)(x_0) = 0_E \iff \forall k \in [\![1,p]\!],\ Q(f)(y_k) = 0_E.$$
Mais chaque base $\mathcal{B}_k$ est "cyclique", c'est-à-dire de la forme $\mathcal{B}_k = (y_k, \varphi_k(y_k), \cdots, \varphi_k^{m_k-1}(y_k))$, donc puisque $f - \lambda_k Id_E$ commute avec $Q(f)$:
$$\forall j \in \mathbb{N}, \qquad Q(f)({\varphi_k}^j(y_k)) = Q(f)((f-\lambda_k Id_E)^j(y_k)) = (f-\lambda_k Id_E)^j(Q(f)(y_k)),$$
et ainsi chaque condition $Q(f)(y_k) = 0_E$ équivaut à l'annulation de $Q(f)$ sur la base $\mathcal{B}_k$, donc sur F_k. Par supplémentarité des F_k dans E, on en déduit
$$Q(f)(x_0) = 0_E \iff Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \pi_f | Q.$$
Ainsi, les polynômes cherchés sont exactement les annulateurs de f.
14. Avec le vecteur x_0 précédemment construit, on obtient que la famille $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est libre : en effet, si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0) = 0_E$ avec les $a_k \in \mathbb{C}$, alors le polynôme $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ vérifie $Q(f)(x_0) = 0_E$, ce qui entraîne $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ d'après la question précédente.
Mais $\deg(Q) < n = \deg(\pi_f)$ donc $Q = 0$, c'est-à-dire $(a_0, \cdots, a_{n-1}) = (0, \cdots, 0)$.
Ainsi, $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E (car libre de cardinal n), ce qui prouve la cyclicité de f.

Partie III : Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

15. Montrons que $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$ est une sous-algèbre de $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$:
    - Le neutre multiplicatif Id_E appartient à $C(f)$ puisque $f \circ Id_E = f = Id_E \circ f$.
    - Stabilité par produit : si g_1, g_2 sont dans $C(f)$, alors $g_1 \circ g_2$ aussi puisque :
    $$f \circ (g_1 \circ g_2) = (f \circ g_1) \circ g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ (g_2 \circ f) = (g_1 \circ g_2) \circ f.$$
    - Stabilité par combinaison linéaire : si g_1, g_2 sont dans $C(f)$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda g_1 + g_2$ aussi puisque :
    $$f \circ (\lambda g_1 + g_2) = \lambda(f \circ g_1) + (f \circ g_2) = \lambda(g_1 \circ f) + (g_2 \circ f) = (\lambda g_1 + g_2) \circ f.$$
16. Dans cette question, on suppose que $(x_0, f(x_0) \cdots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
    - Si $g \in C(f)$, alors g commute avec toutes les puissances f^j ($j \in \mathbb{N}$), donc pour tout $0 \leq j \leq n-1$:
    $$g(f^j(x_0)) = f^j(g(x_0)) = f^j\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^{j+k}(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(f^j(x_0)).$$
    Ainsi, les endomorphismes g et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k$ coïncident sur la base $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0))$, donc ils sont égaux, ce qui montre que $g = R(f)$ avec $R = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

- Réciproquement, si $g = R(f)$ avec $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, alors $g \in C(f)$ (tout polynôme en f commute avec f).

On a donc bien l'équivalence voulue.

17. Montrons que si $F_1, \cdots, F_r$ sont des SEV de E tels que $F_1 \cup \cdots \cup F_r$ est un SEV de E, alors un des F_i contient tous les autres. On procède par récurrence sur $r \geq 2$.
   - **Initialisation** (cas $r = 2$ très classique) : supposons que $F_1 \cup F_2$ est un SEV de E.
     Si $F_1 \not\subset F_2$ et $F_2 \not\subset F_1$, alors il existe $x_1 \in F_1 \setminus F_2$ et $x_2 \in F_2 \setminus F_1$. Mais x_1 et x_2 sont dans le SEV $F_1 \cup F_2$, donc $x_1 + x_2 \in F_1 \cup F_2$. Si $x_1 + x_2 \in F_1$, alors par différence, $x_2 = (x_1 + x_2) - x_1$ est dans F_1, ce qui est contradictoire. De même, si $x_1 + x_2 \in F_2$, alors $x_1 = (x_1 + x_2) - x_2 \in F_2$, ce qui est contradictoire aussi. Donc $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.
   - **Hérédité** : Supposons la propriété vraie pour $r \geq 2$ fixé et montrons-la pour $r + 1$ SEV $F_1, \cdots, F_{r+1}$. Notons $F = F_1 \cup \cdots \cup F_{r+1}$ et supposons que F est un SEV de E.
     Plusieurs cas se présentent :
     * si $F_{r+1} \subset (F_1 \cup \cdots \cup F_r)$, alors $F_1 \cup \cdots \cup F_r = F$ est un SEV de E donc par hypothèse de récurrence, un des F_i (avec $1 \leq i \leq r$) contient tous les autres.
     * si $(F_1 \cup \cdots \cup F_r) \subset F_{r+1}$, alors F_{r+1} contient tous les autres SEV.
     * si $F_{r+1} \not\subset (F_1 \cup \cdots \cup F_r)$ et $(F_1 \cup \cdots \cup F_r) \not\subset F_{r+1}$, alors il existe $x \in F_{r+1} \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_r)$ et $y \in (F_1 \cup \cdots \cup F_r) \setminus F_{r+1}$.
       Essayons alors d'adapter le raisonnement fait dans l'initialisation : il ne fonctionne pas tel quel car $F = (F_1 \cup \cdots \cup F_r) \cup F_{r+1}$, mais $F_1 \cup \cdots \cup F_r$ n'est pas un SEV de E *a priori*.
       Une solution est de considérer plusieurs combinaisons linéaires (au lieu de seulement $x + y$) : puisque x et y sont dans F, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x + y \in F$.
       Si $\lambda x + y \in F_{r+1}$, alors $y = (\lambda x + y) - \lambda x \in F_{r+1}$ (puisque $x \in F_{r+1}$), ce qui est contradictoire. Donc
       $$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda x + y \in F_1 \cup \cdots \cup F_r.$$
       Puisque $\lambda \mapsto \lambda x + y$ est injective (en effet $x \neq 0_E$ sinon il serait dans F_1, exclu) et que $\mathbb{K}$ est infini, on a nécessairement
       $$\exists i \in [\![1, r]\!], \quad \exists \lambda \neq \lambda', \quad \lambda x + y \in F_i, \quad \lambda' x + y \in F_i.$$
       On en déduit par stabilité de F_i que
       $$(\lambda x + y) - (\lambda' x + y) = (\underbrace{\lambda - \lambda'}_{\neq 0})x \in F_i,$$
       et donc $x \in F_i$ avec $1 \leq i \leq r$, ce qui est là aussi contradictoire. Ce troisième sous-cas est donc impossible.

     On a donc montré qu'un des F_i (avec $1 \leq i \leq r + 1$) contient tous les autres.

   Finalement, la propriété est vraie pour $r = 2$ et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier $r \geq 2$.

18. Soit $x \neq 0_E$.
   - L'ensemble $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(f)(x) = 0_E\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ car :
     * Le polynôme nul $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ est dans I_x puisqu'il vérifie $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc *a fortiori* $P(f)(x) = 0_E$.
     * Si P, Q sont dans I_x, alors $P + Q$ aussi car
       $$((P + Q)(f))(x) = (P(f) + Q(f))(x) = P(f)(x) + Q(f)(x) = 0_E + 0_E = 0_E.$$
     * Si $P \in I_x$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $PQ \in I_x$ car
       $$((PQ)(f))(x) = (P(f) \circ Q(f))(x) = (Q(f) \circ P(f))(x) = Q(f)(P(f)(x)) = Q(f)(0_E) = 0_E$$
       (car $Q(f) \in \mathcal{L}(E)$).
   - Cet idéal contient l'idéal $I = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ (formé des polynômes annulateurs de f). Puisque $I = \pi_f \mathbb{K}[X] \neq \{0\}$ (vu que $\deg(\pi_f) = d \geq 1$), on en déduit que I_x est non nul.

- Comme tout idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$, I_x est engendré par un (unique) polynôme unitaire $\pi_{f,x}$. On a alors
$$I = \pi_f \mathbb{K}[X] \subset \pi_{f,x}\mathbb{K}[X] = I_x,$$
donc $\pi_{f,x}$ divise π_f.

19.
- Suivant l'indication, considérons la famille de SEV $(F_x)_{x\neq 0_E} = (Ker(\pi_{f,x}(f)))_{x\neq 0_E}$.
Puisque chaque polynôme $\pi_{f,x}$ est un diviseur unitaire de π_f, on en déduit que la famille de polynômes $(\pi_{f,x})_{x\neq 0_E}$ est finie (en effet, comme tout polynôme non nul, π_f possède un nombre fini de diviseurs unitaires, d'après le théorème de décomposition en facteurs irréductibles). Ainsi, il existe $u_1, \cdots, u_r$ de E tels que
$$\bigcup_{x\neq 0_E} F_x = F_{u_1} \cup \cdots \cup F_{u_r}.$$
Tout vecteur $x \in E \setminus \{0_E\}$ est dans $Ker(\pi_{f,x}(f))$, étant donné que $\pi_{f,x}(f)(x) = 0_E$ par définition de l'idéal I_x, et le vecteur nul aussi (puisque ce sont des SEV). D'où l'égalité
$$E = \bigcup_{x\neq 0_E} F_x = F_{u_1} \cup \cdots \cup F_{u_r}.$$
Ainsi, d'après la question 17., un des F_{u_i} contient tous les autres, donc est égal à E.
Il existe donc $x_1 \in E$ tel que
$$E = F_{x_1} = Ker(\pi_{f,x_1}(f)),$$
donc π_{f,x_1} annule f. On en déduit que π_f divise π_{f,x_1} dans $\mathbb{K}[X]$, mais on sait aussi (d'après qu.18) que π_{f,x_1} divise π_f. Ces deux polynômes étant unitaires, on en conclut $\pi_{f,x_1} = \pi_f$.
- Le vecteur x_1 vérifie $\deg(\pi_{f,x_1}) = d$, donc puisque π_{f,x_1} engendre I_{x_1}, on en déduit que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré $< d$:
$$Q(f)(x_1) = 0_E \implies Q = 0_{\mathbb{K}[X]},$$
c'est-à-dire que la famille $(x_1, f(x_1), \cdots, f^{d-1}(x_1))$ est libre.

20. On pose $(e_1, e_2 \cdots, e_d) = (x_1, f(x_1), \cdots, f^{d-1}(x_1))$ pour tout $1 \leq i \leq d$ et $E_1 = Vect(e_1, \cdots, e_d)$.
- Montrons que E_1 est stable par f en montrant que $f(e_i) \in E_1$ pour tout $1 \leq i \leq d$.
Tout d'abord pour $1 \leq i \leq d-1$, $f(e_i) = f^i(x_1) = e_{i+1} \in E_1$.
En outre, en notant
$$\pi_{f,x_1} = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0,$$
on a
$$0_E = \pi_{f,x_1}(f)(x_1) = f^d(x_1) + \sum_{k=0}^{d-1} a_k f^k(x_1) = f^d(x_1) + \sum_{k=0}^{d-1} a_k e_{k+1},$$
donc $f(e_d) = f^d(x_1) \in Vect(e_1, \cdots, e_d) = E_1$.
Par linéarité de f, on en déduit que
$$f(E_1) = Vect(f(e_1), \cdots, f(e_d)) \subset E_1.$$
- Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Par division euclidienne il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}_{d-1}[X]$ tel que
$$P = \pi_{f,x_1}Q + R = Q\pi_{f,x_1} + R,$$
donc en évaluant en f puis en x_1 :
$$P(f)(x_1) = Q(f)(\underbrace{\pi_{f,x_1}(f)(x_1)}_{=0_E}) + R(f)(x_1) = R(f)(x_1) \in Vect(x_1, f(x_1), \cdots, f^{d-1}(x_1)),$$
ce qui montre $\{P(f)(x_1),\ P \in \mathbb{K}[X]\} \subset E_1$.
L'inclusion réciproque est évidente (puisque $e_i = f^{i-1}(x_1)$ pour tout $1 \leq i \leq d$), donc on a l'égalité $E_1 = \{P(f)(x_1),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

21. La famille $(x_1, \psi_1(x_1), \cdots, \psi_1^{d-1}(x_1)) = (x_1, f(x_1), \cdots, f^{d-1}(x_1))$ est une base de E_1 donc l'endomorphisme induit $\psi_1 = f_{E_1}$ est cyclique.
22. Notons $\Phi = {e_d}^* \in E^*$ la forme linéaire qui à un vecteur $x \in E$ associe sa d^e coordonnée dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$. Considérons l'ensemble

$$F = \{x \in E,\ \forall i \in \mathbb{N},\ \Phi(f^i(x)) = 0\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Ker(\Phi \circ f^i)$$

(c'est bien un SEV de E en tant qu'intersection de SEV).

- F est stable par f car si $x \in F$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\Phi(f^i(f(x))) = \Phi(f^{i+1}(x)) = 0$ (puisque $\Phi(f^j(x)) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$) donc $f(x) \in F$.
- E_1 et F sont en somme directe car si $x \in E_1 \cap F$, alors $x = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i$ avec les $\lambda_i \in \mathbb{K}$, ainsi que $\Phi(f^j(x)) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ donc

$$0 = \Phi(x) = e_d^* \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i \right) = \lambda_d,$$

donc $x = \sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i e_i$, puis

$$0 = \Phi(f(x)) = e_d^* \left(\sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i f(e_i) \right) = e_d^* \left(\sum_{i=1}^{d-1} \lambda_i e_{i+1} \right) = \lambda_{d-1},$$

et en itérant, on obtient $\lambda_d = \cdots = \lambda_1 = 0$ donc $x = 0_E$.

23. L'application $\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^d \\ x & \longmapsto & (\Phi(x), \Phi(f(x)), \cdots, \Phi(f^{d-1}(x))) \end{array} \right.$ est linéaire et les calculs de la question précédente montrent que si $x = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i \in E_1$, on a

$$\Psi(x) = (\Phi(x), \Phi(f(x)), \cdots, \Phi(f^{d-1}(x))) = (\lambda_d, \lambda_{d-1}, \cdots, \lambda_1)$$

donc la restriction $\Psi_{|E_1} : E_1 \to \mathbb{K}^d$ est l'application qui à $x \in E_1$ associe ses coordonnées dans la base $(e_1, \cdots, e_d)$ de E_1, c'est donc un isomorphisme linéaire.

24. On a clairement $F \subset Ker(\Psi)$ (par définition de F).
Montrons l'inclusion réciproque : si $x \in Ker(\Psi)$, alors $\Phi(f^i(x)) = 0$ pour $0 \leq i \leq d-1$, montrons qu'il en est de même pour $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Pour $k \in \mathbb{N}$, on a par division euclidienne

$$X^k = Q\pi_f + R,$$

avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(R) < \deg(\pi_f) = d$, donc

$$f^k = Q(f) \circ \pi_f(f) + R(f) = R(f),$$

ce qui entraîne $f^k(x) = R(f)(x) \in Vect(x, f(x), \cdots, f^{d-1}(x))$, et donc par linéarité de Φ, on obtient $\Phi(f^k(x)) = 0$, c'est-à-dire $x \in F$. On a donc bien $F = Ker(\Psi)$.
Ainsi, $\dim(F) = \dim(Ker(\Psi)) = \dim(E) - rg(\Psi)$, mais d'autre part :

$$\mathbb{K}^d = \Psi(E_1) \subset \Psi(E) \subset \mathbb{K}^d,$$

donc $rg(\Psi) = d$, et on conclut $\dim(F) = n - d$.
Finalement $\dim(E_1 \oplus F) = \dim(E_1) + \dim(F) = d + (n - d) = n$, donc $E_1 \oplus F = E$.

25. Démontrons alors le théorème de décomposition de Frobenius : d'après ce qui précède, on a (en posant $F_1 = F$) : $E = E_1 \oplus F_1$ avec E_1 et F_1 stables par f, et l'induit $\psi_1 = f_{E_1}$ est cyclique.

- si $F_1 = \{0_E\}$, alors c'est terminé (cela correspond au cas où f est cyclique).
- si $F_1 \neq \{0_E\}$, alors $1 \leq \dim(F_1) < \dim(E)$, et on applique ce qui précède à l'endomorphisme induit $f_{F_1} \in \mathcal{L}(F_1)$: il existe deux SEV E_2 et F_2 stables par f_{F_1} (donc par f), tels que $F_1 = E_2 \oplus F_2$, $\dim(F_2) < \dim(F_1)$ et l'induit $\psi_2 = (f_{F_1})_{E_2} = f_{E_2}$ est cyclique.
On a donc $E = E_1 \oplus E_2 \oplus F_2$, avec $\psi_1 = f_{E_1}$ et $\psi_2 = f_{E_2}$ cycliques. De plus, π_{ψ_1} divise π_f, mais ψ_1 étant cyclique en dimension d, on a d'après la question 6. $\deg(\pi_{\psi_1}) = d = \deg(\pi_f)$, donc $\pi_{\psi_1} = \pi_f$. Puisque π_{ψ_2} divise π_f, on en déduit que π_{ψ_2} divise π_{ψ_1}.

- On poursuit cet algorithme tant que $\dim(F_k) > 0$, et il se termine car la suite $(\dim(F_k))$ est une suite d'entiers strictement décroissante. On obtient donc l'existence d'un rang r où les propriétés souhaitées sont vérifiées.

26. Reprenons les notations de la question précédente pour la décomposition de Frobenius de f. Considérons l'application $\Lambda : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_r) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ (g_1, \cdots, g_r) & \longmapsto & \Lambda(g_1, \cdots, g_r) \end{array} \right.$ définie par
$$\forall x \in E, \qquad \Lambda(g_1, \ldots, g_r)(x) = g_1(x_1) + \cdots g_r(x_r),$$
où $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} x_k$ et les $x_k \in E_k$ (ce qui a du sens puisque $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$).

Remarque
$\Lambda(g_1, \cdots, g_r)$ *est l'unique endomorphisme de* E *obtenu par "recollement" de* $g_1, \cdots, g_r$.

Ainsi définie, Λ est linéaire de $\mathcal{L}(E_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_r)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$.
De plus on montre facilement que Λ est injective et que $\Lambda\left(C(\psi_1) \times \cdots \times C(\psi_r)\right) \subset C(f)$.
Ainsi $\dim\left(C(f)\right) \geq \dim\left(C(\psi_1) \times \cdots \times C(\psi_r)\right) = \dim\left(C(\psi_1)\right) + \cdots + \dim\left(C(\psi_r)\right)$.
Or pour $i \in [\![1, r]\!]$, en notant $n_i = \dim E_i$ on a $C(\psi_i) = Vect(\psi_i^0, \psi_i^1, \ldots, \psi_i^{n_i - 1})$ d'après la question 16.
Comme ψ_i est cyclique alors $(\psi_i^0, \psi_i^1, \ldots, \psi_i^{n_i-1})$ est libre d'après 6.
Donc $\dim\left(C(\psi_i)\right) = n_i = \dim\left(E_i\right)$, d'où
$$\dim\left(C(\psi_1)\right) + \cdots + \dim\left(C(\psi_r)\right) = \dim\left(E_1\right) + \cdots + \dim\left(E_r\right) = \dim\left(E_1 \oplus \cdots \oplus E_r\right) = \dim(E) = n.$$
Ainsi $\dim(C(f)) \geq n$.

27. On a $\mathcal{C}(f) = \mathbb{K}[f]$, donc $\dim(\mathcal{C}(f)) = \dim(\mathbb{K}[f]) = \deg(\pi_f)$ (résultat du cours) et par la question précédente, $\deg(\pi_f) \geq n$.
Mais π_f divise χ_f (qui est de degré n) donc par suite $\deg(\pi_f) = n$, c'est-à-dire $d = n$ et $E = E_1$.
Ainsi, $f = \psi_1$ est cyclique.

* * *