

# DS07 du 13/12/2025 (4h)

## Sujet A (MPI\*)

Le sujet se compose de 2 exercices indépendants.  
Calculatrice interdite.

\* \* \*

### Exercice 1 : Approximation uniforme de fonctions périodiques

Pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , on notera  $\lfloor y \rfloor$  la **partie entière** de  $y$ , c'est-à-dire l'unique entier relatif  $\lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$  tel que  $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$ . Pour tout sous-ensemble  $A \subset \mathbb{R}$ , on notera  $\mathbb{1}_A$  sa fonction caractéristique.

Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on notera  $|z|$  le module de  $z$ . On notera  $\ell^1(\mathbb{Z})$  l'ensemble des suites de nombres complexes  $(z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  telles que  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |z_k| < +\infty$ .

On dira qu'une fonction continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est **périodique de période**  $T > 0$  si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x + T) = f(x)$ . Dans ce problème, on supposera toujours que  $T = 1$  et on dira simplement qu'une fonction continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est **périodique** si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x + 1) = f(x)$ . On notera  $\mathcal{C}_{\text{per}}$  l'espace vectoriel de toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continues et périodiques muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Si  $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$  est une fonction continue et périodique que l'on suppose de plus de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , on notera  $f^{(m)}$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la dérivée  $m$ -ième de  $f$  qui appartient encore à l'espace  $\mathcal{C}_{\text{per}}$ . On rappelle qu'une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions de  $\mathcal{C}_{\text{per}}$  **converge uniformément** vers  $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$  lorsque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on notera  $e_k \in \mathcal{C}_{\text{per}}$  la fonction définie par

$$e_k(x) = \exp(2\pi i k x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Soit une fonction  $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on définit  $c_k(f) \in \mathbb{C}$ , le  $k$ -ième **coefficient de Fourier** de  $f$ , par

$$c_k(f) = \int_0^1 f(y) e_{-k}(y) dy.$$

Pour tous  $n, N \in \mathbb{N}$ , on définit les fonctions  $S_n(f) \in \mathcal{C}_{\text{per}}$  et  $\sigma_N(f) \in \mathcal{C}_{\text{per}}$  par

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k \quad \text{et} \quad \sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f).$$

#### I. Préliminaires

Le but de cette partie est d'établir des résultats préliminaires qui seront utiles dans la partie **II**.

1. Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue telle que  $f(0) = f(1)$ . Soit  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction définie par  $\tilde{f}(x) = f(x - \lfloor x \rfloor)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\tilde{f} \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ .
2. Montrer que toute fonction  $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .
3. Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes qui converge vers  $z \in \mathbb{C}$ . Montrer que la suite de nombres complexes  $(Z_N)_{N \in \mathbb{N}}$  définie par

$$Z_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N z_n$$

converge aussi vers  $z$ .

## II. Théorème de Fejér et applications

Le but de cette partie est de démontrer le théorème de Fejér qui affirme que toute fonction  $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$  est la limite uniforme de la suite de polynômes trigonométriques  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ .

Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on définit la fonction  $K_N \in \mathcal{C}_{\text{per}}$  par

$$K_N = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n e_k.$$

4. Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Montrer que

$$\int_0^1 K_N(y) dy = 1.$$

5. Soient  $N \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Montrer que

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \left( \frac{\sin((N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2.$$

6. Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ . Soient  $N \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

(a) Montrer que

$$\sigma_N(f)(x) = \int_0^1 f(y) K_N(x-y) dy.$$

(b) En déduire que

$$\sigma_N(f)(x) - f(x) = \int_0^1 (f(x-y) - f(x)) K_N(y) dy.$$

7. **Théorème de Fejér.** Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$ .

(a) Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $0 < \delta < \frac{1}{2}$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_0^\delta |f(x-y) - f(x)| K_N(y) dy \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{1-\delta}^1 |f(x-y) - f(x)| K_N(y) dy \leq \varepsilon.$$

(b) Montrer que pour tout  $\delta > 0$ , il existe une constante  $\kappa_{\delta, f} > 0$  (qui dépend de  $\delta$  et de  $f$ ) telle que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_\delta^{1-\delta} |f(x-y) - f(x)| K_N(y) dy \leq \frac{\kappa_{\delta, f}}{N+1}.$$

(c) En déduire que la suite de fonctions  $(\sigma_N(f))_{N \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$ .

8. Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{per}}$  une fonction que l'on suppose de plus de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

(a) Soient  $k \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Etablir une relation entre les coefficients de Fourier  $c_k(f)$  et  $c_k(f^{(n)})$ .

(b) En déduire que  $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ .

(c) Montrer que la suite de fonctions  $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ .

\* \* \*

## Exercice 2 : Endomorphismes cycliques

### Notations et définitions

Dans tout le problème,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels et  $n$  est un entier naturel.

On note  $\mathbb{K}_n[X]$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  la  $\mathbb{K}$ -algèbre des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . La matrice unité est notée  $I_n$  et on désigne par  $GL_n(\mathbb{K})$  le groupe des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $A^\top$  la transposée de la matrice  $A$ ,  $\text{rg}(A)$  son rang,  $\text{tr}(A)$  sa trace,  $\chi_A = \det(XI_n - A)$  son polynôme caractéristique,  $\pi_A$  son polynôme minimal et  $\text{sp}(A)$  l'ensemble de ses valeurs propres dans  $\mathbb{K}$ .

Dans tout le problème,  $E$  désigne un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$  de dimension finie  $n$  supérieure ou égale à 2, et  $\mathcal{L}(E)$  est l'algèbre des endomorphismes de  $E$ . On note  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

On note  $f^0 = \text{Id}_E$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $f^{k+1} = f^k \circ f$ .

Si  $Q \in \mathbb{K}[X]$  avec  $Q(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m$ ,  $Q(f)$  désigne l'endomorphisme  $a_0\text{Id}_E + a_1f + \dots + a_mf^m$ . On note  $\mathbb{K}[f]$  la sous-algèbre commutative de  $\mathcal{L}(E)$  constituée des endomorphismes  $Q(f)$  quand  $Q$  décrit  $\mathbb{K}[X]$ .

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme  $f$  de  $E$  :  $\text{rg}(f)$ ,  $\text{tr}(f)$ ,  $\chi_f$ ,  $\pi_f$  et  $\text{sp}(f)$ .

Enfin, on dit que  $f$  est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur  $x_0$  dans  $E$  tel que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  soit une base de  $E$ .

### Partie I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

#### I.A.

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. Montrer que  $M$  et  $M^\top$  ont même spectre.
2. Montrer que  $M^\top$  est diagonalisable si et seulement si  $M$  est diagonalisable.

#### I.B. Matrices compagnons

3. Soit  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  et  $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ . On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

appelée *matrice compagnon associée au polynôme  $Q$* . On admet que

$$\chi_{C_Q} = Q = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0.$$

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $C_Q^\top$ . Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

**I.C. Endomorphismes cycliques**

4. Montrer que  $f$  est cyclique si et seulement s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme  $C_Q$ , où  $Q$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ .
5. Soit  $f$  un endomorphisme cyclique. Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et a toutes ses racines simples.
6. Montrer que si  $f$  est cyclique, alors  $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$  est libre dans  $\mathcal{L}(E)$  et le polynôme minimal de  $f$  est de degré  $n$ .

**Partie II. Etude des endomorphismes cycliques****II.A. Endomorphismes cycliques nilpotents**

Dans cette sous-partie, on suppose que  $f$  est un endomorphisme nilpotent de  $E$ . On note  $r$  le plus petit entier naturel tel que  $f^r = 0$ .

7. Montrer que  $f$  est cyclique si et seulement si  $r = n$ . Préciser alors la matrice compagnon.

**II.B. Une condition suffisante de cyclicité lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .**

Dans cette sous partie II.B, on suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

On suppose que  $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$  est libre et on se propose de montrer que  $f$  est cyclique.

On factorise le polynôme caractéristique de  $f$  sous la forme

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les  $\lambda_k$  sont les  $p$  valeurs propres deux à deux distinctes de  $f$  et les  $m_k$  de  $\mathbb{N}^*$  leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on pose  $F_k = \ker((f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k})$ . C'est le *sous-espace caractéristique* associé à  $\lambda_k$ .

8. Redémontrer que les sous-espaces vectoriels  $F_k$  sont stables par  $f$  et que  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ .

Pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $\varphi_k$  l'endomorphisme induit par  $f - \lambda_k \text{Id}$  sur le sous-espace vectoriel  $F_k$ ,

$$\varphi_k : \begin{cases} F_k \rightarrow F_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x \end{cases}$$

9. Justifier que  $\varphi_k$  est un endomorphisme nilpotent de  $F_k$ .

On note  $\nu_k$  le plus petit entier naturel tel que  $\varphi_k^{\nu_k} = 0$ .

10. Pourquoi a-t-on  $\nu_k \leq \dim(F_k)$ ?

11. Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a  $\nu_k = m_k$ .

12. Déterminer la dimension de  $F_k$  pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , puis en déduire l'existence d'une base  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  de  $E$  dans laquelle  $f$  a une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à  $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$  et étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

On pose  $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \dots + u_{m_1+\dots+m_{p-1}+1}$ .

13. Déterminer les polynômes  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $Q(f)(x_0) = 0$ .

14. Justifier que  $f$  est cyclique.

### Partie III. Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

On revient au cas général ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). **Le polynôme  $\chi_f$  n'est donc plus nécessairement scindé dans  $\mathbb{K}$ .** On appelle commutant de  $f$  l'ensemble  $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g = g \circ f\}$ .

15. Montrer que  $C(f)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ .

#### III.A. Commutant d'un endomorphisme cyclique

On suppose que  $f$  est cyclique et on choisit un vecteur  $x_0$  dans  $E$  tel que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$ . Soit  $g \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme quelconque de  $E$ . On note  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$

les coordonnées du vecteur  $g(x_0)$  dans cette base :  $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$ .

16. Montrer que  $g \in C(f)$  si et seulement s'il existe un polynôme  $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$  tel que  $g = R(f)$ .

#### III.B. Décomposition de Frobenius

On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, ces blocs étant des matrices compagnons.

17. Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels  $F_1, \dots, F_r$  de  $E$  est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces  $F_i$  contient tous les autres.

*On commencera par le montrer pour  $r = 2$ .*

On note  $d \in \mathbb{N}^*$  le degré de  $\pi_f$ .

18. Pour tout  $x$  non nul de  $E$ , montrer que  $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(f)(x) = 0\}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  engendré par un polynôme unitaire  $\pi_{f,x}$  diviseur de  $\pi_f$ .

19. En appliquant la question 17. aux sous-espaces vectoriels  $(\ker(\pi_{f,x}(f)))_{x \neq 0_E}$ , en déduire l'existence d'un vecteur  $x_1$  de  $E$  tel que  $\pi_f = \pi_{f,x_1}$ , puis que  $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1))$  est libre.

On pose  $e_1 = x_1, e_2 = f(x_1), \dots, e_d = f^{d-1}(x_1)$  et  $E_1 = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_d)$ .

20. Montrer que  $E_1$  est stable par  $f$  et que  $E_1 = \{P(f)(x_1) / P \in \mathbb{K}[X]\}$ .

On note  $\psi_1$  l'endomorphisme induit par  $f$  sur le sous-espace vectoriel  $E_1$  :

$$\psi_1 : \begin{cases} E_1 \rightarrow E_1 \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

21. Justifier que  $\psi_1$  est cyclique.

On complète, si nécessaire,  $(e_1, e_2, \dots, e_d)$  en une base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $E$ . Soit  $\Phi$  la  $d$ -ième forme coordonnée qui à tout vecteur  $x$  de  $E$  associe sa coordonnée suivant  $e_d$ .

On note  $F = \{x \in E / \forall i \in \mathbb{N}, \Phi(f^i(x)) = 0\}$ .

22. Montrer que  $F$  est stable par  $f$  et que  $E_1$  et  $F$  sont en somme directe.

Soit  $\Psi$  l'application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}^d$  définie, pour tout  $x \in E$ , par

$$\Psi(x) = (\Phi(f^i(x)))_{0 \leq i \leq d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x)), \dots, \Phi(f^{d-1}(x)))$$

23. Montrer que  $\Psi$  induit un isomorphisme entre  $E_1$  et  $\mathbb{K}^d$ .

24. Montrer que  $E = E_1 \oplus F$ .

25. En déduire qu'il existe  $r$  sous-espaces vectoriels de  $E$ , notés  $E_1, \dots, E_r$ , tous stables par  $f$ , tels que :

—  $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$ ;

— pour tout  $1 \leq i \leq r$ , l'endomorphisme  $\psi_i$  induit par  $f$  sur le sous-espace vectoriel  $E_i$  est cyclique ;

— si on note  $P_i$  le polynôme minimal de  $\psi_i$ , alors  $P_{i+1}$  divise  $P_i$  pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq r-1$ .

#### III.C. Commutant d'un endomorphisme quelconque

26. Montrer que la dimension de  $C(f)$  est supérieure ou égale à  $n$ .

27. On suppose que  $f$  est un endomorphisme tel que l'algèbre  $C(f)$  est égale à  $\mathbb{K}[f]$ . Montrer que  $f$  est cyclique.

\*\*\*