Corrigé de l'épreuve *Mathématiques 2* du CCINP, filière MP, session 2020

Arnaud Moncet

Merci à Pierre Abbrugiati pour sa relecture attentive et ses suggestions bienvenues.

EXERCICE I

Q1. $\boxed{A \text{ est symétrique réelle donc diagonalisable}}$ (et même orthodiagonalisable).

De manière évidente, on observe que :

- $(1,1,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 4 ;
- l'orthogonal du vecteur $(1,1,1)$ est engendré par $(1,-1,0)$ et $(1,0,-1)$, qui sont des vecteurs propres linéairement indépendants associés à la valeur propre 1.

On en déduit que $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \operatorname{diag}(4,1,1) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})}$.

Pour la suite, on calcule $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Q2. On pose $B = P\operatorname{diag}(2,1,1)P^{-1} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, et on a alors $B^2 = P\operatorname{diag}(2,1,1)^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Plus explicitement, $\boxed{B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}$.

Q3. $A^n = PD^nP^{-1} = P\operatorname{diag}(4^n,1,1)P^{-1}$, ce qui donne après calculs : $\boxed{A^n = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}}$.

Q4. Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal π_A est scindé à racines simples qui sont les valeurs propres de A, d'où $\boxed{\pi_A = (X-4)(X-1) = X^2 - 5X + 4}$.

On effectue la division euclidienne de X^n par π_A :

$$X^n = \pi_A Q + aX + b \quad (*)$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

En évaluant (*) en 1 et 4, on obtient le système $\begin{cases} a+b=1 \\ 4a+b=4^n \end{cases}$ d'unique solution $(a,b) = \left(\dfrac{4^n-1}{3}, \dfrac{4-4^n}{3}\right)$.

En évaluant maintenant (*) en A, on obtient : $A^n = 0Q(A) + aA + bI_3$, d'où finalement :

$$\boxed{A^n = \frac{4^n-1}{3}A + \frac{4-4^n}{3}I_3}.$$

Remarque : ce résultat est bien cohérent avec celui de la question précédente.

EXERCICE II

Q5. $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas fermé dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$, car la suite $\left(\dfrac{1}{k}I_n\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a pour limite la matrice nulle qui n'est pas dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (on a utilisé la caractérisation séquentielle des fermés).

Q6. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par l'application déterminant, qui est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ de $\mathbb{R}$ (complémentaire du fermé $\{0\}$), donc $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q7. Si le polynôme caractéristique χ_M possède une racine strictement positive, on note ρ la plus petite de ces racines (un tel minimum existe bien car l'ensemble des racines est fini) ; sinon on pose $\rho = 1$.
Ainsi, $\boxed{\rho > 0}$ et le polynôme caractéristique χ_M n'a pas de racine dans l'intervalle $]0, \rho[$, d'où :

$$\boxed{\forall \lambda \in \left]0, \rho\right[}, \quad \det(M - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_M(\lambda) \neq 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}.$$

La suite $\left(M - \dfrac{\rho}{k}I_n\right)_{k\geqslant 2}$ est alors à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et converge vers M, matrice quelconque de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui montre que $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

Q8. Si $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, les matrices AB et BA sont semblables car $AB = B^{-1}(BA)B$, donc elles ont le même polynôme caractéristique.
Considérons les applications φ_1 et $\varphi_2 \in \mathscr{F}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X])$ définies par $\varphi_1(B) = \chi_{AB}$ et $\varphi_2(B) = \chi_{BA}$ (la matrice A étant fixée et quelconque dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).
Nous venons de voir que φ_1 et φ_2 coïncident sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
D'autre part, φ_1 est continue, par composition de l'application $B \mapsto AB$, continue car linéaire sur l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, avec $M \mapsto \chi_M$ qui est aussi continue par caractérisation à l'aide des coordonnées dans une base, car les coefficients du polynôme caractéristique de M sont polynomiaux en les coefficients de M. De même, φ_2 est continue.
Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que φ_1 et φ_2 coïncident sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui montre que $\boxed{\text{les polynômes caractéristiques de } AB \text{ et } BA \text{ sont égaux}}$ quelles que soient les matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour les matrices élémentaires A et B données dans l'énoncé, $AB = 0$ a pour polynôme minimal X, tandis que $BA = B$ n'a pas pour polynôme minimal X car cette matrice est non nulle (son polynôme minimal est en fait égal à X^2), donc $\boxed{\text{le résultat précédent n'est pas vrai pour les polynômes minimaux}}$.

Q9. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
Son image par l'application déterminant, qui est continue, est alors connexe par arcs.
Or cette image est égale à $\mathbb{R}^*$: l'inclusion directe est évidente et l'inclusion réciproque s'obtient en prenant pour antécédent d'un réel x non nul la matrice $\mathrm{diag}(x, 1, \ldots, 1) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}^*$ n'étant pas connexe par arcs puisque ce n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ (par exemple, $(-1, 1) \in (\mathbb{R}^*)^2$ mais $[-1, 1] \not\subset \mathbb{R}^*$), on obtient ainsi une contradiction et on en déduit que $\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas connexe par arcs}}$.

PROBLÈME

Partie I - Exemples, propriétés

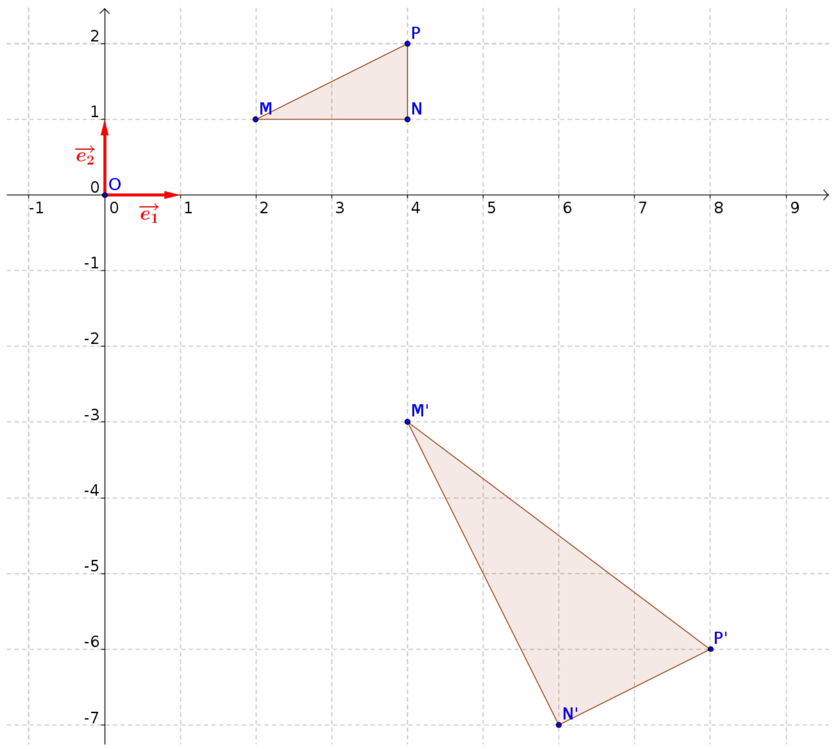
Q10. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A, *i.e.* l'endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A.
Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. $u(X) = (x + 2y, -2x + y)$ donc

$$\|u(X)\| = \sqrt{(x + 2y)^2 + (-2x + y)^2} = \sqrt{x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2} = \sqrt{5}\,\|X\|$$

d'où $\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } k = \sqrt{5}}$.

*Remarque : il faut bien dire **une** similitude de rapport k et non pas **la** similitude de rapport k comme écrit dans l'énoncé, car une telle similitude n'est pas unique ; en effet $k\,\mathrm{Id}_E$ et $-k\,\mathrm{Id}_E$ sont deux similitudes distinctes de rapport k.*

Q11. On a les trois points $M'(4,-3)$, $N'(6,-7)$ et $P'(8,-6)$.



Le triangle MNP étant rectangle en N, son aire vaut : $\mathscr{A}_{MNP} = \dfrac{MN \times NP}{2} = \dfrac{2\times 1}{2} = 1$.

L'aire de $M'N'P'$ vaut : $\mathscr{A}_{M'N'P'} = \left|\dfrac{1}{2}\det_{bc}\left(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}\right)\right| = \left|\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}\right| = 5$ (bc désigne la base canonique).

On remarque que $\boxed{\mathscr{A}_{M'N'P'} = 5\mathscr{A}_{MNP} = k^2\mathscr{A}_{MNP}\text{, avec } k=\sqrt{5} \text{ le rapport de la similitude}}$.

Remarque : le rapport $k^2 = 5$ entre les deux aires correspond à la valeur absolue du déterminant de u (cf. programme de MPSI : interprétation géométrique du produit mixte en termes de volume orienté, effet d'une application linéaire).

Q12. Soit $u \in \mathrm{Sim}(E)$ de rapport $k > 0$.
Si $x \in \mathrm{Ker}(u)$, alors $k\|x\| = \|u(x)\| = \|0\| = 0$, donc $\|x\| = 0$ car $k \neq 0$, d'où $x = 0$ par séparation de la norme. On a donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ (l'inclusion réciproque étant évidente) d'où u est injectif.
Comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que $\boxed{u \text{ est bijectif}}$.

Montrons que $\mathrm{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.

- $\mathrm{Sim}(E) \subset \mathrm{GL}(E)$ d'après ce qui précède.
- $\mathrm{Sim}(E)$ contient le neutre Id_E du groupe $(\mathrm{GL}(E), \circ)$, qui est une similitude de rapport 1 puisque pour tout x dans E, $\|\mathrm{Id}_E(x)\| = \|x\|$.
- **Stabilité par $\circ$:**
  Soient u et $v \in \mathrm{Sim}(E)$, de rapports respectifs k et k' dans $\mathbb{R}_+^*$.
  On a alors pour tout $x \in E$: $\|u \circ v(x)\| = k\|v(x)\| = kk'\|x\|$ avec $kk' > 0$ car $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe.
  Ainsi, $u \circ v$ est une similitude de rapport kk', ce qui montre que $\mathrm{Sim}(E)$ est stable par $\circ$.
- **Stabilité par inverse :**
  On reprend la même similitude u.
  Pour tout $x \in E$: $\|x\| = \|u \circ u^{-1}(x)\| = k\|u^{-1}(x)\|$, d'où $\|u^{-1}(x)\| = \dfrac{1}{k}\|x\|$ avec $\dfrac{1}{k} > 0$.
  Ainsi, u^{-1} est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$, ce qui montre que $\mathrm{Sim}(E)$ est stable par inverse.

Finalement, $\mathrm{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$, donc $\boxed{\mathrm{Sim}(E) \text{ est un groupe pour la loi } \circ}$.

Q13. Soit x un vecteur quelconque de E.
Notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.
Alors AX est la matrice colonne des coordonnées de $u(x)$ dans $\mathscr{B}$, et comme la base $\mathscr{B}$ est orthonormée on a donc :

$$\|x\| = \sqrt{{}^tXX} \quad \text{et} \quad \|u(x)\| = \sqrt{{}^t(AX)AX} = \sqrt{{}^tX\,{}^tAAX}.$$

On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{O}(E) &\iff \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\| \\ &\iff \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \sqrt{{}^tX\,{}^tAAX} = \sqrt{{}^tXX} \quad (\text{car } x \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \text{ est surjective de } E \text{ dans } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) \\ &\iff \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX\,{}^tAAX = {}^tXX \end{aligned}$$

Si ${}^tAA = I_n$, il est clair que la dernière propriété est vérifiée, donc $u \in \mathrm{O}(E)$.
Réciproquement, supposons que $u \in \mathrm{O}(E)$, et notons $(c_{i,j})$ la famille des coefficients de la matrice ${}^tAA$.
En prenant $X = e_i$ dans la relation précédente (i-ième vecteur de la base canonique), on obtient :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad c_{i,i} = 1.$$

En prenant ensuite $X = e_i + e_j$ avec $i \neq j$, il vient $c_{i,i} + c_{i,j} + c_{j,i} + c_{j,j} = 2$, d'où $c_{i,j} + c_{j,i} = 0$.
La matrice ${}^tAA$ étant symétrique (car ${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tAA$), on a donc :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j \implies c_{i,j} = 0$$

et finalement ${}^tAA = I_n$.
Nous avons ainsi établi l'équivalence souhaitée : $\boxed{u \in \mathrm{O}(E) \iff {}^tAA = I_n}$.

On montre exactement de la même façon que :

$$\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } k \text{ si, et seulement si, } {}^tAA = k^2 I_n}.$$

Remarque : la première équivalence, qui est une question de cours, est plus simple à établir en utilisant la caractérisation des automorphismes orthogonaux par l'image d'une base orthonormée, mais cette démonstration ne peut alors plus se généraliser directement pour les similitudes, car nous ne disposons pas dans l'énoncé d'une caractérisation des similitudes par l'image d'une base orthonormée.
De même, la démonstration proposée ci-dessus peut être simplifiée en utilisant la caractérisation des automorphismes orthogonaux par la conservation du produit scalaire ; on obtient ainsi l'équivalence : $u \in \mathrm{O}(E) \iff \forall (X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2,\ {}^tX\,{}^tAAY = {}^tXY$, *qui permet de raccourcir la fin de la preuve en prenant directement pour X et Y deux vecteurs e_i et e_j de la base canonique. Néanmoins, cette démonstration ne peut pas, à ce stade, se généraliser pour les similitudes, car la caractérisation adéquate des similitudes ne sera établie qu'à la question* **Q18**.
À noter aussi que la seconde caractérisation matricielle aurait été très facile à déduire de la première en utilisant le résultat de la question **Q16**.

Q14. Notons u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.
Après calculs on trouve ${}^tAA = 9I_3$, donc d'après la question précédente et le caractère orthonormé de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } 3}$.

La matrice de la similitude u^{-1} est $A^{-1} = \dfrac{1}{9}\,{}^tA = \boxed{\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$.

Soit $f \in \mathrm{O}(E)$, de matrice M dans la base canonique.
La matrice de $u^{-1} \circ f \circ u$ dans la base canonique est $N = A^{-1}MA = \dfrac{1}{9}\,{}^tAMA$. Calculons ${}^tNN$.

$$\begin{aligned} {}^tNN &= \frac{1}{81}\,{}^tA\,{}^tMA\,{}^tAMA \\ &= \frac{1}{9}\,{}^tA\,{}^tMMA && \text{car } A\,{}^tA = A \times 9A^{-1} = 9I_3 \\ &= \frac{1}{9}\,{}^tAA && \text{car } {}^tMM = I_3, \text{ puisque } f \in \mathrm{O}(E) \\ &= I_3 && \text{car } {}^tAA = 9I_3. \end{aligned}$$

Comme la base canonique est orthonormée, on en déduit grâce à la question **Q13** que $\boxed{u^{-1} \circ f \circ u \in \mathrm{O}(E)}$.

Remarque : cette dernière propriété reste vraie pour n'importe quelle similitude, comme on peut le voir facilement grâce à la caractérisation de la question **Q16**.

Q15. On note $S(x,r)$ la sphère de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$.
Soit u un endomorphisme de E possédant la propriété de l'énoncé. En particulier, l'image par u de $S(0,1)$ est égale à $S(0,k)$ pour un certain $k > 0$. Montrons que u est une similitude de rapport k.
Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Le vecteur $\dfrac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, donc il appartient à $S(0,1)$. On en déduit que son image par u appartient à $S(0,k)$, d'où $\left\|u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| = k$.

Or $\left\|u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|\dfrac{1}{\|x\|}u(x)\right\| = \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$, d'où $\|u(x)\| = k\|x\|$, cette dernière égalité restant valable lorsque x est le vecteur nul.
Nous avons ainsi montré que $\boxed{u \text{ est une similitude de } E}$.

Partie II - Assertions équivalentes

Q16. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $u \in \mathrm{Sim}(E)$ de rapport $k > 0$.

Alors $\boxed{u = h \circ v = v \circ h \text{ avec } h = k\,\mathrm{Id}_E \text{ une homothétie vectorielle non nulle de } E \text{ et } v = \dfrac{1}{k}u \in \mathrm{O}(E)}$,

car $v \in \mathscr{L}(E)$ et $\forall x \in E,\ \|v(x)\| = \left\|\dfrac{1}{k}u(x)\right\| = \dfrac{1}{k}\|u(x)\| = \dfrac{1}{k}k\|x\| = \|x\|$.

Remarque : la solution n'est pas unique : on peut aussi prendre $h = -k\,\mathrm{Id}_E$ *et* $v = -\dfrac{1}{k}u$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $u = h \circ v$ avec h une homothétie non nulle de E et $v \in \mathrm{O}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ le rapport de h.
$u \in \mathscr{L}(E)$ (car $\mathscr{L}(E)$ est stable par composition) et $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|\lambda v(x)\| = |\lambda| \cdot \|v(x)\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ avec $|\lambda| > 0$, donc $\boxed{u \text{ est une similitude}}$ de rapport $|\lambda|$.

Q17. $\boxed{A = HB \text{ avec } H = \sqrt{5}\,I_2 \text{ qui est la matrice d'une homothétie (dans la base canonique) et } B = \dfrac{1}{\sqrt{5}}A.}$

Notons v l'endomorphisme canoniquement associé à B.
L'endomorphisme u canoniquement associé à A étant une similitude de rapport $\sqrt{5}$ (cf. **Q10**), $v = \dfrac{1}{\sqrt{5}}u$ est un automorphisme orthogonal (cf. preuve de la question précédente).
Son déterminant est égal à 1 donc il s'agit d'une rotation de $\mathbb{R}^2$.
Son angle θ vérifie $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, donc $\tan\theta = -2$ d'où $\theta \equiv -\operatorname{Arctan}(2)\ [\pi]$ et comme $\cos\theta > 0$, $\theta \equiv -\operatorname{Arctan}(2)\ [2\pi]$.
Finalement, $\boxed{v \text{ est la rotation de } \mathbb{R}^2 \text{ d'angle } -\operatorname{Arctan}(2)}$.

Remarque : de même que dans la question précédente, la solution n'est pas unique : on peut aussi prendre $H = -\sqrt{5}\,I_2$ *et* $B = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}A$*, qui est la matrice de la rotation d'angle* $-\operatorname{Arctan}(2) + \pi$.

Q18. Soient x et y dans E.

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y|x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2\\ \|x-y\|^2 &= \langle x-y|x-y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

d'où par différence : $\boxed{\langle x|y\rangle = \dfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)}$ (formule de polarisation).

$\boxed{\Rightarrow}$ Si u est une similitude de rapport k, alors pour tous x et y dans E :

$$\begin{aligned}\langle u(x)|u(y)\rangle &= \frac{1}{4}\big(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\big) && \text{d'après la formule de polarisation}\\ &= \frac{1}{4}\big(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\big) && \text{car } u \text{ est linéaire}\\ &= \frac{1}{4}\big(k^2\|x+y\|^2 - k^2\|x-y\|^2\big) && \text{car } u \text{ est une similitude de rapport } k\\ &= k^2\langle x|y\rangle && \text{d'après la formule de polarisation.}\end{aligned}$$

On a donc bien : $\boxed{\forall (x,y)\in E^2,\ \langle u(x)|u(y)\rangle = k^2\langle x|y\rangle}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, si l'égalité $\langle u(x)|u(y)\rangle = k^2\langle x|y\rangle$ est vérifiée pour tous x et y de E, alors en particulier pour $x = y$ on a $\|u(x)\|^2 = k^2\|x\|^2$ d'où $\|u(x)\| = k\|x\|$ et ainsi $\boxed{u \text{ est une similitude directe}}$.

Remarque : pour l'implication réciproque, on a supposé que u était un endomorphisme de E et $k > 0$, bien que cela ne soit pas précisé dans l'énoncé. Le cas où u est une application quelconque de E dans E est traité dans la dernière question **Q20**.

Q19. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $u \in \mathrm{Sim}(E)$ de rapport k et soient x et y dans E tels que $\langle x|y\rangle = 0$.
D'après la question précédente, $\langle u(x)|u(y)\rangle = k^2\langle x|y\rangle = 0$. Ainsi, $\boxed{u \text{ conserve l'orthogonalité}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ qui conserve l'orthogonalité et soit $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E.
Soient i et j dans $[\![1,n]\!]$.
$\langle e_i+e_j|e_i-e_j\rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1-1$, donc $\boxed{\langle e_i+e_j|e_i-e_j\rangle = 0}$.

Comme u préserve l'orthogonalité, on a aussi $\langle u(e_i+e_j)|u(e_i-e_j)\rangle$, ce qui donne par linéarité de u : $\langle u(e_i)+u(e_j)|u(e_i)-u(e_j)\rangle = 0$, *i.e.* $\|u(e_i)\|^2 - \|u(e_j)\|^2 = 0$, d'où $\boxed{\|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|}$.

Soit k la valeur commune des $\|u(e_i)\|$, $i \in [\![1,n]\!]$.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\|u(e_i)\| = k$ et $\|e_i\| = 1$, d'où $\boxed{\|u(e_i)\| = k\|e_i\|}$ (cette égalité, bien que demandée par l'énoncé, n'est d'aucune utilité pour la suite).
Soit $x \in E$ de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.
$x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_ie_i$ d'où, par linéarité, $u(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_iu(e_i)$.
Les e_i étant deux à deux orthogonaux, il en est de même des $u(e_i)$ car u conserve l'orthogonalité, donc d'après le théorème de Pythagore : $\|u(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\|u(e_i)\|^2 = k^2\sum_{i=1}^n x_i^2 = k^2\|x\|^2$ (la dernière égalité provient du caractère orthonormé de la base $\mathscr{B}$), et donc $\|u(x)\| = k\|x\|$.
On a ainsi montré que $\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } k}$, **à condition que k soit strictement positif**, ce qui n'est pas automatiquement le cas (u peut être l'endomorphisme nul, et il s'agit en fait du seul endomorphisme conservant l'orthogonalité qui n'est pas une similitude).

Remarque : l'énoncé était donc ici incorrect. Il aurait fallu supposer, pour la réciproque, que u était non nul ou que u était un automorphisme.

Q20. Soient x et y dans E, λ dans $\mathbb{R}$. On veut montrer que le vecteur $z = \lambda u(x) + u(y) - u(\lambda x + y)$ est nul.

$$\begin{aligned}\|z\|^2 &= \langle \lambda u(x)+u(y)-u(\lambda x+y)|\lambda u(x)+u(y)-u(\lambda x+y)\rangle\\ &= \|\lambda u(x)+u(y)\|^2 - 2\langle \lambda u(x)+u(y)|u(\lambda x+y)\rangle + \|u(\lambda x+y)\|^2\\ &= \lambda^2\|u(x)\|^2 + 2\lambda\langle u(x)|u(y)\rangle + \|u(y)\|^2 - 2\lambda\langle u(x)|u(\lambda x+y)\rangle - 2\langle u(y)|u(\lambda x+y)\rangle + k^2\|\lambda x+y\|^2\\ &= \lambda^2k^2\|x\|^2 + 2\lambda k^2\langle x|y\rangle + k^2\|y\|^2 - 2\lambda k^2\langle x|\lambda x+y\rangle - 2k^2\langle y|\lambda x+y\rangle + k^2\lambda^2\|x\|^2 + 2k^2\lambda\langle x|y\rangle + k^2\|y\|^2\\ &= k^2(\lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x|y\rangle + \|y\|^2 - 2\lambda^2\|x\|^2 - 2\lambda\langle x|y\rangle - 2\lambda\langle x|y\rangle - 2\|y\|^2 + \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x|y\rangle + \|y\|^2)\\ &= 0\end{aligned}$$

d'où $z = 0$ et par suite $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$, ce qui montre que $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E}$.

D'après **Q18**, on en déduit que $\boxed{u \text{ est une similitude de } E}$.