

I-Décomposition polaire d'un endomorphisme de \mathbb{R}^n

I-A I-A-1) Montrons que u est autoadjoint, si, et seulement si sa matrice est dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

Soit $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^n , $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $A = (a_{i,j})_{i,j}$ sa matrice dans dans la base \mathcal{B} et notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n .

. u est autoadjoint $\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle \iff$

$\iff \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \langle u(e_j), e_i \rangle = \langle e_j, u(e_i) \rangle \iff a_{i,j} = a_{j,i} \iff A = {}^t A.$

. Supposons que u est défini positif, et soit $\lambda \in Sp(A)$ alors, $\exists x \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } u(x) = \lambda x$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle u(x), x \rangle = \lambda \|x\|^2 > 0$, donc $\lambda > 0$.

. Supposons que $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$ et choisissons grâce au théorème spectral une base

orthonormée (e_1, \dots, e_n) de vecteurs propres de f , alors $\forall x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ non nul

(prenons par exemple $x_j \neq 0$) on a $\langle u(x), x \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \geq \lambda_j x_j^2 > 0$.

I-A-2) Montrons que si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $Sp(S) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $\det(S) = \prod_{k=1}^n \lambda_k > 0$, d'où S est inversible, de

plus si u est son endomorphisme canonique associé, alors

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle u^{-1}(x), u^{-1}(y) \rangle = \langle u^{-1}(x), u(u^{-1}(y)) \rangle = \langle u(u^{-1}(x)), u^{-1}(y) \rangle = \langle x, u^{-1}(y) \rangle$, donc u^{-1}

est symétrique et puisque $Sp(u^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}_+^*$, $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

I-B I-B-1) v induit un endomorphisme de $Ker(u - \lambda id)$

. L'égalité $v^2 = u$ entraîne que $uov = v^2ov = vov^2 = vov$, donc $Ker(u - \lambda id)$ est stable par v , c'est à dire v induit un endomorphisme de $Ker(u - \lambda id)$.

. $\lambda > 0$, donc $X - \sqrt{\lambda}$ et $X + \sqrt{\lambda}$ sont premiers entre eux, et le théorème de décomposition des noyaux entraîne que $Ker(u - \lambda id) = Ker(v^2 - \lambda id) = Ker(v - \sqrt{\lambda} id) \oplus Ker(v + \sqrt{\lambda} id)$, or v est défini positif, donc $Ker(v + \sqrt{\lambda} id) = \{0\}$, ce qui entraîne que $Ker(u - \lambda id) = Ker(v - \sqrt{\lambda} id)$, donc $v = \sqrt{\lambda} id_{Ker(u - \lambda id)}$.

I-B-2) Expression de v et conclusion

. Soit $\lambda \in Sp(u)$ et p_λ la projection sur $Ker(u - \lambda id)$ parallèlement à $\bigoplus_{\mu \neq \lambda} Ker(u - \mu id)$, alors $u =$

$\sum_{\lambda \in Sp(u)} \lambda p_\lambda$ et par suite $v = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \sqrt{\lambda} p_\lambda$, ce qui traduit que si v existe, il est unique.

. Si v est donné par l'égalité précédente, alors $\forall x \in Ker(u - \lambda id), v(x) = \sqrt{\lambda} x$, donc $v^2 = u$ sur chaque sous-espace $Ker(u - \lambda id)$ et puisque $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} Ker(u - \lambda id)$, on aura $v^2 = u$ sur \mathbb{R}^n .

. Soient $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k, y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$ les décompositions de $x, y \in \mathbb{R}^n$ dans la somme directe orthogonale

$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^n Ker(u - \lambda_k id)$, alors $\langle v(x), y \rangle = \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k} \langle x_k, y_k \rangle = \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k} \langle y_k, x_k \rangle = \langle x, v(y) \rangle$ de

plus si x est non nul, il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_j \neq 0$, donc

$\langle v(x), x \rangle = \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k} \|x_k\|^2 \geq \lambda_j \|x_j\|^2 > 0$, ce qui montre que v est symétrique défini positif.

I-B-3) v est un polynôme en u

. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes deux à deux de u , alors il existe un unique polynôme

$Q \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, Q(\lambda_k) = \sqrt{\lambda_k}$ à savoir $Q = \sum_{k=1}^p \sqrt{\lambda_k} L_k$ où L_1, \dots, L_p les polynômes

de Lagrange donnés par $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$.

On peut aussi justifier l'existence de Q grâce à l'automorphisme $\mathbb{R}_{p-1}[X] \xrightarrow{P} \mathbb{R}^p \xrightarrow{P} (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_p))$

. On a $v = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \sqrt{\lambda} p_\lambda = \sum_{\lambda \in Sp(u)} Q(\lambda) p_\lambda = Q(\sum_{\lambda \in Sp(u)} \lambda p_\lambda) = Q(u)$.

I-C I-C-1) tAA est symétrique définie positive

Soit u l'endomorphisme canonique associé à A , alors $(f^*of)^* = f^*o(f^*)^* = f^*of$, donc f est autoadjoint, de plus f inversible ($A \in GL_n(\mathbb{R})$), et par suite $\forall x \in \mathbb{R}^n$ non nul, $f(x)$ est aussi non nul et on a $\langle f^*of(x), x \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|^2 > 0$, ce qui entraîne que f^*of est autoadjoint défini positif, c'est à dire ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

I-C-2) Décomposition polaire

${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et la traduction matricielle de $I-B$ assure l'existence d'une matrice unique $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $S^2 = {}^tAA$.

On pose $O = AS^{-1}$, alors d'après $(I-A-2)$ $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc

${}^tOO = {}^tS^{-1}{}^tAAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$, et par suite $O \in O(n)$, ce qui assure l'existence.

. Si on a deux décompositions $A = OS = O'S'$, alors ${}^tAA = S^2 = S'^2$, donc $(S - S')(S + S') = O_n$, or ${}^t(S + S') = {}^tS + {}^tS' = S + S'$ et si u, v sont les endomorphismes canoniques associés respectivement à S et S' , alors $\forall x \in \mathbb{R}^n$ non nul, $\langle (u+v)(x), x \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle v(x), x \rangle > 0$, donc $S + S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et par suite $S + S' \in GL_n(\mathbb{R})$, ce qui entraîne que $S - S' = O_n$, d'où l'unicité.

I-C-3) Un cas particulier de décomposition polaire

${}^tAA = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 36 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, on vérifie que $Sp({}^tAA) = \{16, 36, 4\}$ et $A = PD^tP$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(16, 36, 4), \text{ donc } S = P \text{diag}(4, 6, 2) {}^tP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et par suite } O = AS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

I-D I-D-1) $O(n)$ est une partie compacte

. L'application $\varphi : \begin{matrix} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & {}^tMM \end{matrix}$ est à composantes polynômiales en les coefficients de M , donc continue et par suite $O(n) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$ est image réciproque du fermé $\{I_n\}$ par l'application continue φ , donc $O(n)$ est un fermé.

. Soit $M = (m_{i,j})_{i,j} \in O(n)$, alors $\forall j \in [[1, n]]$, $\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2 = 1$, donc $\forall i, j \in [[1, n]]$, $|m_{i,j}| \leq 1$, et par suite

$\|M\| = \sup_{1 \leq i, j \leq n} (|m_{i,j}|) \leq 1$, d'où $O(n)$ est une partie bornée.

. $O(n)$ est une partie fermée bornée en dimension finie, donc $O(n)$ est un compact.

I-D-2) $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé

. $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension finie $\frac{n(n+1)}{2}$, donc c'est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

. Soit $(A_m)_m$ une suite de matrices de $O(n)$ convergente vers $A \in S_n(\mathbb{R})$ et soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

L'application $\varphi_X : \begin{matrix} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \langle MX, X \rangle = {}^tXMX \end{matrix}$ est polynômiale en les coordonnées de X ,

donc elle est continue, or $(A_m)_m$ converge vers A , et par continuité de φ_X , on aura $(\varphi_X(A_m))_m$ converge vers $\varphi_X(A)$ et puisque $\forall m \in \mathbb{N}$, $\varphi_X(A_m) \geq 0$, on obtient $\varphi_X(A) \geq 0$, c'est à dire $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle AX, X \rangle \geq 0$, ce qui traduit que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

I-D-3) $GL_n(\mathbb{R})$ est une partie dense

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on sait que $\text{card}(Sp(A)) < +\infty$, donc $\exists n_0$ tel que $\forall m \geq n_0 \in \mathbb{N}$, $A_m = A - \frac{1}{m}I_n$ est inversible, de plus $\|A_m - A\| = \frac{1}{m}\|I_n\| = \frac{1}{m}$ tend vers 0, lorsque m tend vers $+\infty$, ce qui entraîne que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de $GL_n(\mathbb{R})$.

I-D-4) Une décomposition polaire qui n'est pas unique

. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors d'après la question précédente, $\exists (A_m)_m \subset GL_n(\mathbb{R})$ convergente vers A , et par la question $(I-C-2)$, $\exists (O_m, S_m)_m \subset O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A_m = O_m S_m$.

. $O(n)$ étant compact, donc on peut extraire de $(O_m)_m$ une sous suite $(O_{\varphi(m)})_m$ convergente vers un élément $O \in O(n)$, et par continuité du produit matriciel, la suite $(S_{\varphi(m)})_m = ({}^tO_{\varphi(m)}A_{\varphi(m)})_m$ converge vers $S = {}^tOA$, or d'après la question $(I-D-3)$, $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$, donc $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et on a bien $A = OS$.

. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

I-E φ est un homéomorphisme

- . La question (I - C - 2) assure que $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \exists!(O, S) \in O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $A = OS$, donc φ est bijective.
- . φ est continue comme restriction d'une application continue, à savoir le produit matriciel.
- . Soit $(A_m)_m \subset GL_n(\mathbb{R})$ convergente vers A . Posons $\varphi^{-1}(A_m) = (O_m, S_m)$ et $\varphi^{-1}(A) = (O, S)$, alors $A_m = O_m S_m$ et $A = OS$.
- La compacité de $O(n)$ nous permet d'extraire une sous-suite $(O_{\varphi(m)})_m \subset O(n)$ convergente vers $O' \in O(n)$, or $(S_{\varphi(m)})_m = ({}^t O_{\varphi(m)})_m A_{\varphi(m)}$ converge d'une part par continuité du produit matriciel vers ${}^t O' A$, et d'autre part vers $S' \in S_n^+(\mathbb{R})$, car $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé, donc $S' = {}^t O' A$ qui devient inversible, donc $S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- L'unicité de la décomposition $A = OS = O' S'$ entraîne que $O' = O$, ceci affirme que la suite $(O_m)_m$ admet une seule valeur d'adhérence dans $O(n)$, donc $(O_m)_m$ converge vers O et par suite $(S_m)_m = ({}^t O_m A_m)_m$ converge vers ${}^t O A = S$.
- On vient de montrer que $\varphi^{-1}(A_m) = (O_m, S_m)$ converge vers $(O, S) = \varphi^{-1}(A)$, donc φ^{-1} est continue.

II-Deux applications

II-A Première application

II-A-1) Justifions l'égalité

En transposant et en prenant le conjugué de l'égalité $A = UBU^{-1}$, on aura ${}^t A = {}^t \bar{U}^{-1} {}^t B {}^t \bar{U}$ et l'égalité $U {}^t \bar{U} = I_n$ entraîne que ${}^t A = U {}^t B U^{-1}$.

II-A-2) La semblabilité dans \mathbb{C} l'entraîne dans \mathbb{R}

- L'application $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \det(X + xY)$ est un polynôme réel, qui est non nul grâce à $\det(X + iY) \neq 0$, donc $\exists \mu \in \mathbb{R}$ tel que $X + \mu Y \in GL_n(\mathbb{R})$.
- L'égalité $AU = UB$ entraîne que $(AX - XB) + i(AY - YB) = O_n$, or $AX - XB \in M_n(\mathbb{R})$ et $AY - YB \in M_n(\mathbb{R})$, donc $AX - XB = AY - YB = O_n$.
- En posant $P = X + \mu Y \in GL_n(\mathbb{R})$, on aura avec les égalités précédentes $AP = A(X + \mu Y) = AX + \mu AY = XB + \mu YB = (X + \mu Y)B = PB$, et de même ${}^t AP = P {}^t B$.

II-A-3) Existence de O

- . On a $P = OS$, donc ${}^t PP = S^2$ et d'après (II - A - 2), $AP = PB$ et ${}^t AP = P {}^t B$, donc ${}^t PA = B {}^t P$ et par suite $S^2 B = {}^t P(PB) = {}^t P(AP) = ({}^t PA)P = (B {}^t P)P = B({}^t PP) = BS^2$.
. $S^2 \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, donc d'après la question (I - B - 3), S est un polynôme en S^2 et S^2 commute avec B , donc aussi S commute avec B .
- Avec cette dernière égalité, on aura $A = PBP^{-1} = OSBS^{-1}O = OBSS^{-1}O = OB {}^t O$.

II-B Seconde application

II-B-1) l'existence d'une solution entraîne $Sp({}^t AA) \subset [0, 1[$

Soit $X \in GL_n(\mathbb{R})$ une solution du système (*), alors ${}^t AA + {}^t XX = I_n$, donc $Sp(I_n - {}^t AA) = Sp({}^t XX)$, or d'après (I - C - 2), ${}^t XX \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et par suite $Sp(I_n - {}^t AA) \subset \mathbb{R}_+^*$, c'est à dire $\forall \lambda \in Sp({}^t AA)$, $1 - \lambda > 0$ et puisque ${}^t AA \in S_n^+(\mathbb{R})$ on aura $\lambda \geq 0$, ce qui entraîne que $\lambda \in [0, 1[$.

II-B-2) Existence d'une solution du système

- $X \in GL_n(\mathbb{R})$, donc il existe un couple unique $(U, H) \in O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $X = UH$, et par suite chercher X revient à chercher U et H .
- En écrivant $X = UH$, l'égalité ${}^t AA + {}^t XX = I_n$ s'écrit $H^2 = I_n - {}^t AA$, or d'après (II - B - 1), $I_n - {}^t AA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et puisque $H \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ on aura H est l'unique élément de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = I_n - {}^t AA$. (c'est la racine carrée de la matrice $I_n - {}^t AA$).
- $A \in M_n(\mathbb{R})$, donc d'après (I - D - 4) il existe $U \in O(n)$, $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = US$ et soit $H \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'unique racine de $I_n - {}^t AA$, alors $X = UH \in GL_n(\mathbb{R})$ est solution du système (*).
En effet :
. ${}^t AA + {}^t XX = I_n - H^2 + H^2 = I_n$, ce qui entraîne que X vérifie la première équation du système.
. ${}^t AX - {}^t XA = S {}^t U U H - H {}^t U U S = SH - HS$, or H est un polynôme en $I_n - {}^t AA$ qui est un polynôme en ${}^t AA = S^2$ qui est donc un polynôme en S , ce qui entraîne que H est un polynôme en S , donc $HS = SH$ et par suite la deuxième équation du système est vérifiée.

III-Valeurs propres d'une matrice

III-A Une relation de récurrence

. $P_1(x) = x - 2, P_2(x) = (x - 2)^2 - 1.$

$$\text{. Soit } p > 2, \text{ alors } P_p(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & x-2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)P_{p-1}(x) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & x-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-2)P_{p-1}(x) - P_{p-2}(x).$$

. La relation de récurrence est donnée par $P_0 = 1, P_1 = x - 2$ et $\forall p \geq 2, P_p = (x - 2)P_{p-1} - P_{p-2}.$

III-B Existence de θ et expression de P_p

. Soit $x \in \mathbb{R}$, tel que $|2 - x| < 2$, donc $\left| \frac{2-x}{2} \right| < 1$, or l'application $\begin{matrix}]0, \pi[& \longrightarrow &]-1, 1[\\ \theta & \longmapsto & \cos(\theta) \end{matrix}$ est une bijection, d'où l'existence d'un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\frac{2-x}{2} = \cos(\theta).$

$$\text{. } P_1(x) = -2\cos(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}, P_2(x) = 4\cos^2(\theta) - 1 = \frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}.$$

. Soit $p \geq 3$ et supposons que $P_k(x) = (-1)^k \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ pour tout $k \leq p$, alors

$$P_{p+1}(x) = -2\cos(\theta)(-1)^p \frac{\sin((p+1)\theta)}{\sin(\theta)} - (-1)^{p-1} \frac{\sin(p\theta)}{\sin(\theta)} = (-1)^{p+1} \frac{2\cos(\theta)\sin((p+1)\theta) - \sin(p\theta)}{\sin(\theta)}, \text{ or}$$

$$2\cos(a)\sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b), \text{ donc } P_{p+1}(x) = (-1)^{p+1} \frac{\sin((p+2)\theta)}{\sin(\theta)}, \text{ ce qui établit la récurrence.}$$

III-C Valeurs propres de A_p

. x est racine de $P_p \iff (p+1)\theta = k\pi \iff \theta = \frac{k\pi}{p+1}$, or $\theta \in]0, \pi[$, donc $k \in]0, p+1[$, et par suite les racines de P_p sont les $x_k = 2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(p+1)}\right)$ où $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

. En conclusion $Sp(A_p) = \left\{ 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(p+1)}\right) \mid k \in \llbracket 1, p \rrbracket \right\}.$

III-D Une base de vecteurs propres

. A_p est symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable. (on peut aussi dire puisqu'elle admet p valeurs propres distinctes).

. Soit $x \in Sp(A_p)$, $\theta \in]0, \pi[$ tel que $2 - x = 2\cos(\theta)$ et soit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la valeur

propre $x = 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, alors on obtient le système

$$\begin{cases} -x_{k-1} + 2\cos(\theta)x_k - x_{k+1} = 0 & \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ x_0 = x_{p+1} = 0 \end{cases}$$

. la suite $(x_k)_{1 \leq k \leq p}$ vérifie la relation de récurrence précédente d'équation caractéristique

$\cos^2(\theta) - 1 = (i\sin(\theta))^2$, donc de racines $\pm e^{i\theta}$, et par suite $x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}$, et puisque $x_0 = 0$ on

obtient $x_k = -2i\alpha\sin(k\theta)$, ce qui entraîne que le vecteur propre associé à la valeur propre $x = 4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$$\text{est } V = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \sin(2\theta) \\ \vdots \\ \sin(p\theta) \end{pmatrix} \text{ où } \theta \in \left\{ \frac{\pi}{p+1}, \frac{2\pi}{p+1}, \dots, \frac{p\pi}{p+1} \right\}.$$

IV- Un équivalent d'un maximum

IV-A Existence de la matrice A

$$\varphi : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow (M_n(\mathbb{R}))^* \\ \text{. On considère l'application } A \longmapsto \varphi(A) : \begin{matrix} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & tr(AM) \end{matrix}$$

. La linéarité de φ est immédiate.

. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in Ker(\varphi)$, alors $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \varphi(A)(M) = tr(AM) = 0$, ce qui donne en particulier pour $M = {}^tA, tr({}^tAA) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = 0$, donc $\forall i, j \in [[1, n]], a_{i,j} = 0$, c'est à dire $A = 0$, et par suite φ est

injective et vu que $dim(M_n(\mathbb{R})) = dim((M_n(\mathbb{R}))^*)$, φ devient un automorphisme.

. φ étant bijective, donc pour toute forme linéaire f de $M_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $f = \varphi(A)$, c'est à dire $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), f(M) = tr(AM)$.

IV-B IV-B-1) Existence de M_n

f étant linéaire et $dim(M_n(\mathbb{R})) < +\infty$, donc elle est continue à valeurs réelles, et $O(n)$ est un compact, ce qui assure l'existence de M_n .

IV-B-2) tAA admet n valeurs propres positives

La matrice ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$, donc diagonalisable et $Sp({}^tAA) \subset \mathbb{R}^+$.

IV-B-3) Une autre expression de M_n

. ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$, donc d'après le théorème spectral $\exists P \in O(n), \exists D = diag(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n})$ tel que ${}^tAA = PD^2P = (PD^tP)^2 = S^2$ et soit $A = \Omega S$ la décomposition non nécessairement unique de A où $\Omega \in O(n)$ et $S = PD^tP$.

. soit $O \in O(n)$, alors $f(O) = tr(AO) = tr(\Omega SO) = tr(\Omega PD^tPO) = tr(D^tPO\Omega P) \leq \sup\{tr(DO) / O \in O(n)\}$, donc

$\sup\{f(O) / O \in O(n)\} \leq \sup\{tr(DO) / O \in O(n)\}$

. Soit $O \in O(n)$, alors $tr(DO) = tr({}^tPSP O) = tr({}^tP^t\Omega APO) = tr(APO\Omega^tP^t\Omega) \leq \sup\{tr(AO) / O \in O(n)\}$, donc $\sup\{tr(DO) / O \in O(n)\} \leq \sup\{tr(AO) / O \in O(n)\}$.

IV-B-4) Expression de M_n en fonction des μ_k

. $tr(DI_n) = tr(D) = \sum_{k=1}^n \sqrt{\mu_k} \leq M_n$.

. S étant symétrique réelle positive, donc \mathbb{R}^n admet une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de vecteurs propres de S associés aux valeurs propres $\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n}$.

. Soit $O \in O(n), tr(AO) = tr(\Omega SO) = tr(O\Omega S) = \sum_{i=1}^n \langle O\Omega S e_i, e_i \rangle =$

$= \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_i} \langle O\Omega e_i, e_i \rangle \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_i} \|O\Omega e_i\| \|e_i\|$, or $O\Omega \in O(n)$, donc $\|O\Omega e_i\| = \|e_i\| = 1$, donc

$\forall O \in O(n), tr(AO) \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_i}$, ce qui entraine que $M_n \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_i}$ et par suite $M_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{\mu_i}$.

IV-C IV-C-1) La matrice A tel que $f(M) = tr(AM)$

$f(M) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{j,i} m_{i,j} = tr(AM)$ où $a_{j,i} = \begin{cases} 0 & si & 1 \leq i \leq j-1 \\ 1 & si & i \geq j \end{cases}$, donc

$$A = (a_{i,j})_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV-C-2) Inverse de la matrice A

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors

$$AX = Y \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 \\ x_2 + \dots + x_n = y_2 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall k \in [1, n] & b_k - b_{k+1} = x_k \\ & b_{n+1} = 0 \end{cases}$$

donc l'inverse de A est $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & O \\ 0 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ O & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

IV-C-3) Valeurs propres de $A^{-1} {}^tA^{-1}$

$$B = A^{-1t}A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cdot \text{ Soit pour tout } x \in \mathbb{R}, Q_n(x) = \det(xI_n - B) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-2 & 1 \\ 0 & \ddots & 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

Une décomposition par rapport à dernière ligne entraîne que, avec $2-x = 2\cos(\theta)$

$$Q_n(x) = (x-1)P_n(x) - \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & x-2 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & x-2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-1)P_{n-1}(x) - P_{n-2} =$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{n-1}(1-2\cos(\theta)) \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} - (-1)^{n-2} \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)} = \\ &= \frac{(-1)^n(2\cos(\theta)\sin(n\theta) - \sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta))}{\sin(\theta)} = \frac{(-1)^n(\sin((n+1)\theta) - \sin(n\theta))}{\sin(\theta)} = \\ &= \frac{(-1)^n(2\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right))}{\sin(\theta)} = (-1)^n \frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

$$\cdot Q_n(x) = 0 \iff \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} \iff x = 2\left(1 - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right)\right) = 2\left(1 + \cos\left(\frac{2(n-k)\pi}{2n+1}\right)\right) = 4\cos^2\left(\frac{(n-k)\pi}{2n+1}\right), \text{ où } k \in [[0, n-1]], \text{ donc } Sp(A^{-1t}A^{-1}) = \left\{4\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \mid k \in [[1, n]]\right\}.$$

IV-C-4) Calcul de M_n

• L'inverse de tAA est $A^{-1t}A^{-1}$, donc $Sp({}^tAA) = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$

$$\text{avec } \mu_k = \frac{1}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}, \text{ donc } M_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}.$$

IV-C-5 Un équivalent simple de M_n

• Pour tout $k \in [[1, n]]$, $\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sin\left(\frac{2(n-k)+1}{2(2n+1)}\pi\right)$, donc

$$M_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\sin\left(\frac{2(n-k)+1}{2(2n+1)}\pi\right)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\sin\left(\frac{2k+1}{2(2n+1)}\pi\right)}.$$

• L'égalité de Taylor à l'ordre 1 et 3, appliquée à la fonction $t \mapsto \sin(t)$ sur l'intervalle $[0, x]$ pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, s'écrit.

$$\cdot \sin(x) = x + \frac{1}{1!} \int_0^x (x-t)\sin''(t)dt = x - \int_0^x (x-t)\sin(t)dt \leq x$$

$$\cdot \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3!} \int_0^x (x-t)^3 \sin^{(4)}(t)dt = x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3!} \int_0^x (x-t)^3 \sin(t)dt \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

• De plus $x - \frac{x^3}{6} = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \geq x\left(1 - \frac{\pi^2}{24}\right) > 0$, ce qui donne l'encadrement

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, 0 < x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x.$$

• L'encadrement précédent fournit

$$S_n = \frac{2n+1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \leq M_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\frac{(2k+1)\pi}{2n+1} - \frac{(2k+1)^3\pi^3}{24(2n+1)^3}} = \Sigma_n.$$

. C'est clair que $S_n = \frac{2n+1}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \right) \sim \frac{n \ln(n)}{\pi}$, de plus

$$\Sigma_n - S_n = \frac{2n+1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{(2k+1)\pi}{12(2n+1)}}{1 - \frac{(2k+1)^2\pi^2}{24(2n+1)^2}} \right] \leq \frac{2n+1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k\pi}{12(2n+1)}}{1 - \frac{k^2\pi^2}{24(2n+1)^2}} \right] \quad (\text{On a ajouté}$$

les termes paires).

. La quantité entre crochets est une somme de Riemann associée à la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$t \mapsto \frac{\frac{t}{12}}{1 - \frac{t^2}{24}}, \text{ donc convergente vers } \int_0^\pi \frac{\frac{t}{12}}{1 - \frac{t^2}{24}} dt = \left[-\ln \left(1 - \frac{t^2}{24} \right) \right]_0^\pi = -\ln \left(1 - \frac{\pi^2}{24} \right)$$

ceci montre que $\Sigma_n - S_n \sim Kn$ où $K = \frac{-1}{\pi} \ln \left(1 - \frac{\pi^2}{24} \right)$, or $Kn = o(S_n)$, donc $\Sigma_n \sim S_n$ et par suite

$$M_n \sim \frac{n \ln(n)}{\pi}.$$