Un corrigé de l'épreuve
CCP MP Maths 2 2014

Partie I : EXERCICE 1

I.1.

I.1.a La matrice A est symétrique à coefficients réels donc elle est diagonalisable d'après le théorème spectral.

I.1.b On calcule le polynôme caractéristique $\chi_A(t) = \det(tI_3 - A)$: la calculatrice fournit
$\chi_A(t) = t^3 - 3t^2 - 22t + 24 = (t-1)(t-6)(t+4)$, donc le spectre de A vaut $Sp(A) = \{1, 6, -4\}$.
Pour chacune des valeurs propres λ de A, on résout avec la calculatrice le système linéaire $AX = \lambda X$, où l'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.

On en déduit que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

I.1.c Si $A^n = PD^nP^{-1}$, alors $A^{n+1} = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^{n+1}P^{-1}$, or $A^0 = PD^0P^{-1}$, donc d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

La calculatrice fournit $P^{-1} = \dfrac{1}{50}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ (en normalisant les vecteurs colonnes de P, on aurait pu remplacer P par une matrice Q orthogonale, auquel cas $Q^{-1} = {}^tQ$),

puis, $A^n = PD^nP^{-1} = \dfrac{1}{50}\begin{pmatrix} 32 + 9(-4)^n + 9\,6^n & -15((-4)^n - 6^n) & 12(-2 + (-4)^n + 6^n) \\ -15((-4)^n - 6^n) & 25((-4)^n + 6^n) & -20((-4)^n - 6^n) \\ 12(-2 + (-4)^n + 6^n) & -20((-4)^n - 6^n) & 18 + 16((-4)^n + 6^n) \end{pmatrix}$.

I.2. D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si l'on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on a $X_{n+1} = AX_n$, donc par récurrence,

on montre que $X_n = A^nX_0$, où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Après simplifications, on obtient :
$u_n = \dfrac{1}{50}(8 + 21((-4)^n + 6^n))$, $v_n = \dfrac{-7}{10}((-4)^n - 6^n)$ et $w_n = \dfrac{1}{25}(-3 + 14((-4)^n + 6^n))$.

Partie II : EXERCICE 2

II.1.

II.1.a *Lemme :* Commençons par montrer que $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E / p(x) = x\}$.
En effet, si $x \in \mathrm{Im}(p)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$, donc $p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$.
Et réciproquement si $x = p(x)$, alors $x \in \mathrm{Im}(p)$.

p est annulé par le polynôme $X^2 - X = X(X-1)$ et X et $X - 1$ sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de décomposition des noyaux,
$E = \mathrm{Ker}(X(X-1))(p) = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - Id_E) = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ d'après le lemme.

II.1.b Notons $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$, où $r = \mathrm{rg}(p)$ et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$.
Alors $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et d'après le lemme, la matrice de p dans la base e se décompose par blocs selon $\mathrm{mat}(p, e) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}$, où $0_{p,q}$ désigne la matrice nulle à p lignes et q colonnes.
Ainsi $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}(\mathrm{mat}(p, e)) = r = \mathrm{rg}(p)$.

II.1.c Prenons f une base de E et considérons l'endomorphisme u de E défini par :

$$\operatorname{mat}(u,f) = M = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & \\ 0 & -1 & 0_{2,n-2} \\ \hline 0_{n-2,2} & & 0_{n-2,n-2} \end{array}\right) \text{ (on a bien } n \geq 2).$$

Alors $\operatorname{Tr}(u) = 2 = \operatorname{rg}(u)$, mais $M^2 \neq M$, donc u n'est pas un projecteur. Ainsi un endomorphisme u de E vérifiant $\operatorname{Tr}(u) = \operatorname{rg}(u)$ n'est pas nécessairement un projecteur de E.

II.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale, donc diagonalisable, et son rang vaut 1.

Posons $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi B est aussi de rang 1.

Si B était diagonalisable, comme $\chi_B = X^3$, B serait semblable à la matrice nulle, donc on aurait $B = 0$ ce qui est faux. Ainsi B n'est pas diagonalisable.

II.3.

II.3.a D'après la formule du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = n-1$, donc il existe une base de $\operatorname{Ker}(u)$ de la forme $(e_1, \cdots, e_{n-1})$. On peut la compléter en une base $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ de E.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $u(e_i) = 0$, donc en posant $u(e_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$,

on a bien $\operatorname{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

II.3.b Supposons d'abord que $\operatorname{Tr}(u) = 0$. Alors $a_n = 0$ et la matrice de u étant triangulaire supérieure, $\chi_u(X) = X^n$, donc $\operatorname{Sp}(u) = \{0\}$. Alors si u était diagonalisable, il existerait une base dans laquelle la matrice de u serait nulle, ce qui est faux car $rg(u) = 1$. Ainsi u n'est pas diagonalisable.

Supposons maintenant que $\operatorname{Tr}(u) \neq 0$. Alors $a_n \neq 0$ et $\chi_u(X) = X^{n-1}(X - a_n)$, donc il existe un vecteur propre f_n associé à a_n. Les sous-espaces propres étant en somme directe, on sait alors que $(e_1, \ldots, e_{n-1}, f_n)$ est une base de vecteurs propres de E, donc u est diagonalisable.

II.3.c Avec les notations de la question précédente, $a_n = 1 \neq 0$

et $\operatorname{mat}(u, (e_1, \ldots, e_{n-1}, f_n)) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) = M$. On a $M^2 = M$, donc u est un projecteur.

II.3.d Les trois colonnes de A étant 2 à 2 colinéaires et non nulles, $\operatorname{rg}(A) = 1$ et $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De plus $\operatorname{Tr}(A) = 1$, donc d'après la question précédente, A est une matrice de projecteur.

Par la formule du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(A)) = 2$, or on vérifie que A annule les deux vecteurs indépendants $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Partie III : PROBLEME

Questions préliminaires

III.1.

III.1.a Soit $s \in \mathcal{S}(E)$. Selon le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de s : s est orthodiagonalisable.

Traduction matricielle : si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $S = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$.

III.1.b $\chi_S(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(S)X + \det(S) = X^2$, donc $\mathrm{Sp}(S) = \{0\}$ et, à nouveau, si S était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui est faux.

Ainsi S est symétrique à coefficients complexes sans être diagonalisable.

III.2.

III.2.a Notons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \epsilon_i$. Alors $s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \epsilon_i$. Or la base β est orthonormée, donc $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$.

III.2.b Supposons que $x \in S(0,1)$. Alors $1 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Ainsi, $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_n x_i^2 = \lambda_n$ et $R_s(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 x_i^2 = \lambda_1$.

On a bien montré que, pour tout $x \in S(0,1)$, $R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n]$

III.3.

III.3.a Supposons que s est symétrique défini positif.

Soit λ une valeur propre de s. Il existe un vecteur propre x : x est non nul et $s(x) = \lambda x$.

Ainsi $0 < \langle s(x)|x\rangle = \lambda\|x\|^2$ et $\|x\| > 0$, donc $\lambda > 0$.

Si maintenant s est seulement symétrique positif, on a $0 \leq \lambda\|x\|^2$ donc $\lambda \geq 0$.

III.3.b $s_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans la base B du vecteur $s(e_j)$, or B est orthonormée, car on utilise le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, donc $s_{i,j} = \langle e_i|s(e_j)\rangle$.

En particulier, $s_{i,i} = \langle e_i|s(e_i)\rangle$, or e_i est un vecteur unitaire, donc d'après la question 2.b, $s_{i,i} = R_s(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n]$.

Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

III.4. Les coefficients de ${}^tMM - I_n$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de M, donc d'après le cours, l'application $M \mapsto {}^tMM - I_n$ est continue.

III.5. D'après le cours, les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, donc pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$, ce qui implique : pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $|a_{i,j}| \leq 1$.

III.6. Si, pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\|_\infty = \max_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2} |m_{i,j}|$, on définit d'après le cours une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour laquelle $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée d'après la question précédente. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est encore bornée quelque soit la norme utilisée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De plus, si l'on note f l'application $M \mapsto {}^tMM - I_n$ de la question 4, alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0_{n,n}\})$, or le singleton $\{0_{n,n}\}$ est un fermé et f est continue, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III.7.a D'après la question 1.a, il existe une matrice P orthogonale telle que $S = P\Delta P^{-1} = P\Delta\, {}^tP$.

Ainsi, $T(A) = \mathrm{Tr}([AP\Delta]P^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}[AP\Delta]) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$ en posant $B = P^{-1}AP$.

A et P sont toutes deux orthogonales et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, donc B est orthogonale.

III.7.b On vérifie que, pour tout $(C,D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$\mathrm{Tr}((\alpha C + D)S) = \alpha\mathrm{Tr}(CS) + \mathrm{Tr}(DS)$, donc l'application $C \mapsto \mathrm{Tr}(CS)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc c'est une application continue. Sa restriction T sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est donc aussi continue. Mais $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, donc T admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

III.7.c Avec les notations de la question 7.a, $T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$, donc en convenant de noter $M_{i,j}$ le (i,j)-ème coefficient d'une matrice M, $T(A) = \sum_{i=1}^{n} (B\Delta)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{i,j}\Delta_{j,i}$, mais Δ est diagonale,

donc $T(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{i,i}$.

D'après la question 5, et les λ_i étant positifs, $T(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(S)$.

Ainsi $t \leq \mathrm{Tr}(S)$, mais de plus $\mathrm{Tr}(S) = T(I_n)$ et I_n est une matrice orthogonale, donc $t = \mathrm{Tr}(S)$.

Inégalité d'Hadamard

III.8. L'inégalité demandée est une conséquence de l'inégalité aritmético-géométrique, car on sait que $\det(S) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\mathrm{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

III.9. On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^n$.
Soit $X \in \mathbb{R}^n$. ${}^tXS_\alpha X = {}^t(DX)S(DX) \geq 0$ car $DX \in \mathbb{R}^n$ et car S est symétrique positive. Ceci montre que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
$\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tDSD)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{(j,k)\in\{1,\ldots,n\}^2} [{}^tD]_{i,j} S_{j,k} D_{k,i}$, mais D est diagonale, donc $\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_{i,i}$.

III.10. On peut appliquer l'inégalité $(*)$ à la matrice S_α car elle est bien dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,
or $\det(S_\alpha) = \det(D)^2 \det(S) = \left(\prod_{i=1}^{n} \alpha_{i,i}\right)^2 \det(S)$ et $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_{i,i}} s_{i,i} = 1$,
donc $\det(S) \leq \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{i,i}}\right)^2 = \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$.

III.11. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXS_\varepsilon X = {}^tXSX + \varepsilon\|X\|^2 \geq 0$, donc $S_\varepsilon \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus d'après la question 3.b, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $0 \leq \lambda_1 \leq s_{i,i}$, donc $s_{i,i} + \varepsilon > 0$, ce qui permet d'appliquer l'inégalité de la question précédente à S_ε : pour tout $\varepsilon > 0$, $\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^{n}(s_{i,i} + \varepsilon)$.
De plus il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, donc $S_\varepsilon = P(\Delta + \varepsilon I_n)P^{-1}$, ce qui prouve que $\det(S_\varepsilon) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i + \varepsilon)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i + \varepsilon) \leq \prod_{i=1}^{n}(s_{i,i} + \varepsilon)$ et on conclut en faisant tendre ε vers 0.

Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

III.12. Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. ${}^tXBX = {}^t(\Omega X)A(\Omega X) > 0$, car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\Omega X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (Ω est orthogonale, donc elle est inversible). Ainsi $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
De plus Ω est orthogonale, donc d'après le cours, $|\det(\Omega)| = 1$. Or, $\det(A) = 1$,
donc $\det(B) = \det(\Omega)^2\det(A) = 1$: on a prouvé que $B \in \mathcal{U}$.
$\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}([A\Omega\Delta]\,{}^t\Omega) = \mathrm{Tr}({}^t\Omega[A\Omega\Delta]) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$.

III.13. D'après la question précédente, $\{\mathrm{Tr}(AS) \setminus A \in \mathcal{U}\} \subset \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$.
Réciproquement, soit $B \in \mathcal{U}$. On pose $A = \Omega B\,{}^t\Omega$. En adaptant la démonstration de la question précédente, on montre que $A \in \mathcal{U}$ et que $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$, donc $\{\mathrm{Tr}(AS) \setminus A \in \mathcal{U}\} = \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$.
Prenons $x \in \{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$. Il existe $B \in \mathcal{U}$ telle que $x = \mathrm{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_{i,i}$. Mais $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc d'après 3.b, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $B_{i,i} > 0$. Ainsi $x > 0$. Ceci prouve que $\{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Elle possède donc une borne inférieure.

III.14. Par application de l'inégalité arithmético-géométrique,
on obtient $\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(B\Delta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i b_{i,i}\right)^{1/n}$, ce qui fournit l'inégalité demandée.

III.15. Soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$. D'après la question 11, $\prod_{i=1}^{n} b_{i,i} \geq \det(B) = 1$, donc $\left(\prod_{i=1}^{n} b_{i,i}\right)^{1/n} \geq 1$.

Ainsi, d'après la question précédente, $\mathrm{Tr}(B\Delta) \geq n\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n} = n(\det(S))^{1/n}$.

III.16. Ainsi $n(\det(S))^{1/n}$ est un minorant de $\{\mathrm{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$, or la borne inférieure est le plus grand des minorants, donc $m \geq n(\det(S))^{1/n}$.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^tXDX = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2 > 0$, donc $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus $\det(D) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i = \frac{\det(S)}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = 1$, donc $D \in \mathcal{U}$. Or $\mathrm{Tr}(D\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_i = n(\det(S))^{1/n}$, donc $m = n(\det(S))^{1/n}$.

Fin du corrigé