

DS06 du 10/02/2024 (2h30)

Sujet A (MPI*)

Le sujet se compose d'un problème.
Calculatrice interdite.

* * *

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$ dont le produit scalaire est noté (\cdot, \cdot) et la norme euclidienne est notée $\|\cdot\|$. On note $L(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $GL(E)$ le groupe des automorphismes de E . Pour tout endomorphisme u de E , on note u^i l'endomorphisme $u \circ u \circ \dots \circ u$ (i fois) avec la convention $u^0 = \text{Id}_E$ (identité). L'ensemble vide est noté \emptyset .

On rappelle qu'un sous-ensemble C de E est *convexe* si pour tous x, y dans C et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. De plus, pour toute famille a_1, \dots, a_p d'éléments de C convexe et tous nombres réels positifs ou nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ dont la somme est égale à 1, on a $\sum_{i=1}^p \lambda_i a_i \in C$.

Si F est un sous-ensemble quelconque de E , on appelle *enveloppe convexe* de F , et on note $\text{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant F . On note \mathcal{H} l'ensemble des $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et on admet que $\text{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ où $x_1, \dots, x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$.

L'espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes est noté $M_{n,m}(\mathbb{R})$. On notera en particulier $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$. La matrice transposée d'une matrice A est notée A^T . La trace de A est notée $\text{Tr}(A)$.

On note $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ inversibles et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n .

Les parties A, B et C sont indépendantes

A. Préliminaires sur les matrices symétriques

On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques. Une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul, on a $X^T S X > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer qu'une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbb{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans \mathbb{R}^{+*} .
2. En déduire que pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $R \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = R^T R$. Réciproquement montrer que pour tout $R \in GL_n(\mathbb{R})$, $R^T R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que l'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe.

B. Autres préliminaires

Les trois questions de cette partie sont mutuellement indépendantes.

4. Soit K un sous-ensemble compact de E et $\text{Conv}(K)$ son enveloppe convexe. On rappelle que \mathcal{H} est l'ensemble des $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Définir une application Φ de $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ dans E telle que $\text{Conv}(K) = \Phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$. En déduire que $\text{Conv}(K)$ est un sous-ensemble compact de E .

5. On désigne par g un endomorphisme de E tel que pour tous x, y dans E , $(x|y) = 0$ implique $(g(x)|g(y)) = 0$.
 Montrer qu'il existe un nombre réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$. (On pourra utiliser une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) et considérer les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ pour $i \in \{2, \dots, n\}$.)
 En déduire que g est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.
6. On se place dans l'espace vectoriel euclidien $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique défini par $(A|B) = \text{Tr}(A^T B)$. (On ne demande pas de vérifier que c'est bien un produit scalaire).
 Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$.

C. Quelques propriétés de la compacité

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$.

7. Montrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.

Soit K un sous-ensemble compact de E . On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon r .

8. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et x_1, \dots, x_p éléments de E tels que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon). \text{ (On pourra raisonner par l'absurde.)}$$

On considère une famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles ouverts de E , I étant un ensemble quelconque, telle que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

9. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i . (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.) En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ telle que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}$.

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide : $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$.

10. Montrer qu'il existe une sous famille finie $(F_{i_1}, \dots, F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} = \emptyset$.

D. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

On sautera cette partie dans un premier temps.

Seul le résultat de la question 18. est utile pour la partie E.

Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K un sous-ensemble non vide, compact et *convexe* de E . Pour tout $x \in E$, on note $N_G(x) = \sup_{u \in G} \|u(x)\|$.

11. Montrer que N_G est bien définie et que c'est une norme sur E .
12. Montrer en outre que N_G vérifie les deux propriétés suivantes :
 - pour tous $u \in G$ et $x \in E$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$;
 - pour tous $x, y \in E$ avec x non nul, $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Pour la deuxième propriété, on pourra utiliser le fait que si $z \in E$, l'application qui à $u \in G$ associe $\|u(z)\|$ est continue.

On considère un élément $u \in L(E)$, et on suppose que K est stable par u , c'est à dire que $u(K)$ est inclus dans K . Pour tout $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x)$. Enfin, on appelle *diamètre* de K le réel $\delta(K) = \sup_{x, y \in K} \|x - y\|$ qui est bien défini car K est borné.

13. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans K et en déduire qu'il en existe une suite extraite convergente vers un élément a de K . Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u(x_n) - x_n\| \leq \frac{\delta(K)}{n}$. En déduire que l'élément a de K est un point fixe de u .

On suppose maintenant que le compact non vide convexe K est stable par tous les éléments de G .

Soit $r \geq 1$ un entier, u_1, u_2, \dots, u_r des éléments de G et $u = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i$.

14. Montrer que K est stable par u et en déduire l'existence de $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

15. Montrer que $N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a))$. En déduire que pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, on a

$$N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a)\right) = N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a)\right)$$

16. En déduire, pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geq 0$ tel que $u(a) = \frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.
17. Déduire de la question précédente que a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1, \dots, r\}$.
18. En utilisant le résultat de la question 10, montrer qu'il existe $a \in K$ tel que pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.

E. Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

On se place à nouveau dans l'espace vectoriel euclidien $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(A|B) = \text{Tr}(A^T B)$. On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne le groupe linéaire et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n .

Soit G un sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Si $A \in G$, on définit l'application ρ_A de $M_n(\mathbb{R})$ dans lui-même par la formule $\rho_A(M) = A^T M A$. On vérifie facilement, et on l'admet, que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, l'application qui à $A \in G$ associe $\rho_A(M)$ est continue.

On note $H = \{\rho_A / A \in G\}$, $\Delta = \{A^T A / A \in G\}$ et $K = \text{Conv}(\Delta)$.

19. Montrer que $\rho_A \in GL(M_n(\mathbb{R}))$ et que H est un sous-groupe compact de $GL(M_n(\mathbb{R}))$.
20. Montrer que Δ est un compact contenu dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et que K est un sous-ensemble compact de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est stable par tous les éléments de H .
21. Montrer qu'il existe $M \in K$ tel que pour tout $A \in G$, $\rho_A(M) = M$. En déduire l'existence de $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $A \in G$, $NAN^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. En déduire enfin qu'il existe un sous-groupe G_1 de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $G = N^{-1}G_1N = \{N^{-1}BN / B \in G_1\}$.

Soit K un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$, et $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $NKN^{-1} \subseteq O_n(\mathbb{R})$. On désigne par g l'automorphisme de \mathbb{R}^n de matrice N dans la base canonique de \mathbb{R}^n , par P un hyperplan de \mathbb{R}^n et par σ_P la symétrie orthogonale par rapport à P .

22. Montrer que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est une symétrie, puis que c'est un endomorphisme orthogonal de \mathbb{R}^n . En déduire que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$. Montrer que g conserve l'orthogonalité et en déduire K .