

## DS06 du 02/12/2025 (3h)

### Sujet unique

### Endomorphismes échangeurs

#### Partie A : Quelques considérations en dimension 2

1. Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  vérifie la condition **(C3)**, alors il existe  $\varphi \in GL(E)$  tel que  $-u = \varphi^{-1} \circ u \circ \varphi$ , donc

$$-tr(u) = tr(-u) = tr(\varphi^{-1} \circ u \circ \varphi).$$

Or, pour tous endomorphismes  $v, w \in \mathcal{L}(E)$ , on a  $tr(v \circ w) = tr(w \circ v)$  (car  $tr(AB) = tr(BA)$  pour toutes matrices carrées  $A, B$ , et par définition la trace d'un endomorphisme est la trace de sa matrice dans n'importe quelle base). Donc

$$tr(\varphi^{-1} \circ u \circ \varphi) = tr((\varphi^{-1} \circ u) \circ \varphi) = tr(\varphi \circ (\varphi^{-1} \circ u)) = tr((\varphi \circ \varphi^{-1}) \circ u) = tr(u),$$

ce qui entraîne  $-tr(u) = tr(u)$  et donc  $\boxed{tr(u) = 0}$ .

2. Puisque  $u \in \mathcal{L}(E)$  avec  $\dim(E) = 2$ , on a  $\chi_u = X^2 - tr(u)X + \det(u) = X^2 - \delta^2$ , donc par le théorème de Cayley-Hamilton,  $u^2 - \delta^2 Id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , c'est-à-dire  $\boxed{u^2 = \delta^2 Id_E}$ .

**Variante** : en fixant une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , on a

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

avec  $tr(A) = tr(u) = 0$  donc  $d = -a$  et  $\det(A) = \det(u) = ad - bc = -a^2 - bc \neq 0$ . Donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = -\det(A)I_2 = \delta^2 I_2,$$

ce qui montre que  $\boxed{u^2 = \delta^2 Id_E}$ .

**Suite de la question** : Le polynôme  $X^2 - \delta^2 = (X - \delta)(X + \delta)$  annule  $u$  donc  $Sp(u) \subset \{-\delta, \delta\}$  avec  $\delta \in \mathbb{C}^*$ . Or,  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  donc  $Sp(u) \neq \emptyset$ , et de plus  $tr(u) = 0$  donc la somme des valeurs propres (comptées avec multiplicité) est nulle, ce qui montre que  $\boxed{Sp(u) = \{-\delta, \delta\}}$ .

Ainsi, les deux sous-espaces propres  $\boxed{E_{-\delta}(u) \text{ et } E_{\delta}(u)}$  sont nécessairement de dimension 1 (car de dimension non nulle et en somme directe dans  $E$  avec  $\dim(E) = 2$ ).

**Remarque** : on a montré au passage que  $u$  est diagonalisable, puisque les SEP sont supplémentaires dans  $E$  (ou parce qu'on a trouvé un polynôme annulateur de  $u$  scindé à racines simples).

3. Notons  $e_1$  une base de  $E_{\delta}(u)$  et  $e_2$  une base de  $E_{-\delta}(u)$ . On a  $u(e_1) = \delta e_1$  et  $u(e_2) = -\delta e_2$  avec  $(e_1, e_2)$  libre (vecteurs propres pour deux valeurs propres différentes), donc

$$u(e_1 + e_2) = \delta(e_1 - e_2).$$

Puisque  $e_1 - e_2 \notin Vect(e_1 + e_2)$ ,  $\boxed{\text{la droite } D = Vect(e_1 + e_2) \text{ vérifie bien } u(D) \not\subset D}$ .

En posant  $D' = Vect(e_1 - e_2)$ , on a  $u(D) \subset D'$  et  $u(D') \subset D$  (puisque  $u(e_1 - e_2) = \delta(e_1 + e_2)$ ).

De plus  $D \oplus D' = E$  (deux droites d'intersection nulle) donc  $\boxed{u \text{ est échangeur}}$ .

**Partie B : La condition (C1) implique (C2) et (C3)**

4. En effectuant un produit par blocs :

$$\begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n^2 + B0_{p,n} & 0_n B + B0_p \\ 0_{p,n}0_n + 0_p0_{p,n} & 0_{p,n}B + 0_p^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix} = 0,$$

donc la matrice  $\begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix}$  est de carré nul.

De même, la matrice  $\begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{bmatrix}$  est de carré nul, donc la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{bmatrix} \text{ est la somme de deux matrices de carré nul.}$$

5. La matrice diagonale  $D = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{bmatrix}$  vérifie  $D^2 = I_{n+p}$  donc  $D$  est inversible avec  $D^{-1} = D$ .

Ensuite, un produit en blocs montre que  $DMD^{-1} = DMD = -M$ , donc  $M$  est semblable à  $-M$ .

6. Par hypothèse, on a  $F \oplus G = E$  avec  $(f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$  et  $(g_1, \dots, g_p)$  une base de  $G$ . Puisque  $u(F) \subset G$ , on en déduit

$$\forall j \in [1, n], \quad u(f_j) \in \text{Vect}(g_1, \dots, g_p),$$

et puisque  $u(G) \subset F$ , on a aussi

$$\forall j \in [1, p], \quad u(g_j) \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_n).$$

En considérant la base  $\mathbf{B} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$  de  $E$ , on en déduit que  $\text{Mat}_{\mathbf{B}}(u)$  est de la forme :

$$\text{Mat}_{\mathbf{B}}(u) = \begin{bmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{bmatrix}$$

(c'est-à-dire de la forme de la matrice  $M$  précédemment décrite).

7. Trois cas se présentent :

- Si  $F$  et  $G$  sont non nuls, alors d'après les questions 6. et 4.,  $M = \text{Mat}_{\mathbf{B}}(u)$  est une somme de deux matrices de carré nul, donc  $u$  est somme de deux endomorphismes  $a$  et  $b$  de carré nul. La condition (C2) est donc vérifiée par  $u$ .  
De plus, d'après la question 5.,  $-M = DMD^{-1}$ , donc en notant  $\varphi$  l'unique automorphisme de  $E$  tel que  $D = \text{Mat}_{\mathbf{B}}(\varphi)$ , on a  $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ , ce qui valide la condition (C3).
- Si  $F = \{0_E\}$ , alors  $G = E$  et  $u(E) = u(G) \subset F = \{0_E\}$ , ce qui montre  $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Dans ce cas,  $u$  vérifie trivialement (C2) et (C3).
- Si  $G = \{0_E\}$ , alors on obtient de même  $u = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , donc (C2) et (C3).

Dans tous les cas, (C2) et (C3) sont vérifiées par  $u$ .

**Partie C : La condition (C2) implique la condition (C1) : cas d'un automorphisme**

8. Si  $f^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , alors  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$  (puisque  $f(\text{Im}(f)) = f(f(E)) = f^2(E) = \{0_E\}$ ).

On en déduit l'inégalité  $\dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f))$ , et par le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f)) \leq 2 \dim(\text{Ker}(f)),$$

donc  $\dim(\text{Ker}(f)) \geq \frac{1}{2} \dim(E)$ .

9. Puisque  $u = a + b$ , on a  $\text{Ker}(a) \cap \text{Ker}(b) \subset \text{Ker}(u)$  (pour tout  $x \in E$ ,  $a(x) = b(x) = 0_E$  implique  $u(x) = a(x) + b(x) = 0_E$ ). Mais  $u$  est un automorphisme donc  $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$  et ainsi,  $\text{Ker}(a) \cap \text{Ker}(b) \subset \{0_E\}$ , ce qui montre que  $\text{Ker}(a) + \text{Ker}(b) = \text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)$ .

En outre,  $a^2 = b^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$  donc d'après la question 8. :

$$\dim(\text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)) = \dim(\text{Ker}(a)) + \dim(\text{Ker}(b)) \geq \frac{1}{2} \dim(E) + \frac{1}{2} \dim(E) = \dim(E),$$

donc nécessairement  $\boxed{Ker(a) \oplus Ker(b) = E}$ .

La question 8. montre également les inclusions  $Im(a) \subset Ker(a)$  et  $Im(b) \subset Ker(b)$ , et on a aussi l'égalité des dimensions puisque d'après le théorème du rang appliqué à  $a$  et  $b$  :

$$\underbrace{(\dim(Ker(a)) - \dim(Im(a)))}_{\geq 0} + \underbrace{(\dim(Ker(b)) - \dim(Im(b)))}_{\geq 0} = 2[\dim(Ker(a)) + \dim(Ker(b)) - \dim(E)] = 0,$$

donc  $\dim(Ker(a)) = \dim(Im(a))$  et de même pour  $b$ . Ainsi,  $\boxed{Ker(a) = Im(a) \text{ et } Ker(b) = Im(b)}$ .

**Remarque** : au passage, on a montré que  $\dim(E) = 2 \dim(Ker(a))$  donc  $\dim(E)$  est paire.

10. Les sous-espaces vectoriels  $F = Ker(a)$  et  $G = Ker(b)$  sont donc supplémentaires dans  $E$ , et on a

$$u(Ker(a)) = (a + b)(Ker(a)) = b(Ker(a)) \subset Im(b) = Ker(b),$$

donc  $u(F) \subset G$  et symétriquement  $u(G) \subset F$ . Donc  $\boxed{u \text{ est échangeur}}$ .

### Partie D : Intermède : un principe de décomposition

11. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $x \in Ker(v^k)$ , on a  $v^k(x) = 0_E$  donc  $v^{k+1}(x) = v(v^k(x)) = v(0_E) = 0_E$  (par linéarité de  $v = f - \lambda Id_E$ ), c'est-à-dire  $x \in Ker(v^{k+1})$ . Ainsi,  $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, Ker(v^k) \subset Ker(v^{k+1})}$ .
12. L'ensemble  $\{\dim(Ker(v^k)), k \in \mathbb{N}\}$  est une partie non vide de  $\mathbb{N}$ , majorée par  $\dim(E)$ , donc elle possède un maximum, noté :

$$d = \max_{k \in \mathbb{N}}(\dim(Ker(v^k))) \in [0, \dim(E)].$$

Il existe donc un entier  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\dim(Ker(v^p)) = d$ .

$\boxed{\text{Pour } k \geq p}$ , on a  $Ker(v^k) \supset Ker(v^p)$ , mais par maximalité de  $d = \dim(Ker(v^p))$ , on a égalité des dimensions, donc  $\boxed{Ker(v^k) = Ker(v^p)}$ .

En outre,

$$Ker(v^0) \subset Ker(v) \subset \dots \subset Ker(v^p) = Ker(v^{p+1}) = \dots = Ker(v^k) = \dots$$

$$\text{donc } \boxed{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} Ker(v^k) = \bigcup_{0 \leq k \leq p} Ker(v^k) = Ker(v^p)}.$$

Enfin, quitte à changer  $p$  en  $p + 1$  (qui convient aussi),  $\boxed{\text{on peut supposer } p \text{ pair}}$ .

**Remarque** : En fait, on connaît un résultat plus fort avec la suite des noyaux itérés : dès qu'on obtient un entier  $j$  tel que  $Ker(v^j) = Ker(v^{j+1})$ , la suite  $(Ker(v^k))_{k \geq j}$  stationne (voir les exercices du chapitre 4), mais ce n'était pas demandé ici.

13. Par définition de l'entier  $p$ , on a  $Ker(v^k) = Ker(v^p)$  pour tout  $k \geq p$ , et donc en particulier :

$$\boxed{Ker(v^{2p}) = Ker(v^p) = E_\lambda^c(f)}.$$

Ensuite, on a  $E_\lambda^c(f) \cap Im(v^p) = \{0_E\}$  car si  $x \in E_\lambda^c(f) \cap Im(v^p) = Ker(v^p) \cap Im(v^p)$ , alors  $v^p(x) = 0_E$  et il existe  $t \in E$  tel que  $x = v^p(t)$ , donc  $v^{2p}(t) = 0_E$ , c'est-à-dire  $t \in Ker(v^{2p}) = Ker(v^p)$ , ce qui montre  $x = v^p(t) = 0_E$ . En outre, par le théorème du rang :

$$\dim(E_\lambda^c(f)) + \dim(Im(v^p)) = \dim(Ker(v^p)) + \dim(Im(v^p)) = \dim(E),$$

$$\text{donc } \boxed{E = E_\lambda^c(f) \oplus Im(v^p)}.$$

Enfin,  $\boxed{E_\lambda^c(f) = Ker((f - \lambda Id_E)^p)}$  et  $Im(v^p) = Im((f - \lambda Id_E)^p)$  sont stables par  $f$  d'après le cours car ce sont des SEV de la forme  $Ker(Q(f))$ ,  $Im(Q(f))$ , où  $Q = (X - \lambda)^p \in \mathbb{C}[X]$ .

**Remarque** : en fait, lorsqu'il est non nul,  $E_\lambda^c(f) = Ker((f - \lambda Id_E)^p) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Ker((f - \lambda Id_E)^k)$  est le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre  $\lambda$  de  $f$ , mais il n'était pas indispensable de le reconnaître ici.

14. Vu que le sous-espace vectoriel  $Im(v^p)$  est stable par  $f$ , on peut considérer l'endomorphisme induit par  $f$  sur ce sous-espace, notons-le  $f' = f_{Im(v^p)} \in \mathcal{L}(Im(v^p))$ .

Par définition d'une restriction :

$$Ker(f' - \lambda Id_{Im(v^p)}) = \{x \in Im(v^p), f(x) = \lambda x\} = Ker(f - \lambda Id_E) \cap Im(v^p) = Ker(v) \cap Im(v^p),$$

donc

$$Ker(f' - \lambda Id_{Im(v^p)}) \subset Ker(v^p) \cap Im(v^p) = E_\lambda^c(f) \cap Im(v^p) = \{0_E\}$$

(d'après la supplémentarité précédemment établie). Ainsi,  $Ker(f' - \lambda Id_{Im(v^p)}) = \{0_E\}$ , c'est-à-dire que  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $f' = f_{Im(v^p)}$ .

Etudions maintenant l'induit  $f'' = f_{E_\lambda^c(f)} : \text{pour tout } x \in E_\lambda^c(f) = Ker(v^p)$ ,

on a  $(f - \lambda Id_E)^p(x) = 0_E$ , donc le polynôme  $(X - \lambda)^p \in \mathbb{C}[X]$  annule  $f''$ , ce qui montre que  $Sp(f'') \subset \{\lambda\}$ . Mais si le sous-espace vectoriel  $E_\lambda^c(f)$  est non nul, alors (puisque  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ),

$Sp(f'') \neq \emptyset$ , donc  $Sp(f'') = \{\lambda\}$ . Ainsi, l'endomorphisme induit  $f_{E_\lambda^c(f)}$  n'a que  $\lambda$  comme valeur propre.

**Remarque :** on a montré que le second induit vérifie  $(f'' - \lambda Id_{E_\lambda^c(f)})^p = 0$  donc se décompose sous la forme

$$f_{E_\lambda^c(f)} = \lambda Id_{E_\lambda^c(f)} + n_\lambda$$

avec  $n_\lambda$  nilpotent d'indice  $\leq p$ .

15. On suppose ici que  $Sp(f) \subset \{\lambda, \mu\}$  avec  $\mu \neq \lambda$ .

Montrons d'abord que  $Im(v^p) \subset E_\mu^c(f)$ .

Si  $Im(v^p) = \{0_E\}$ , cette inclusion est triviale.

Si  $Im(v^p) \neq \{0_E\}$ , alors l'endomorphisme induit  $f' = f_{Im(v^p)}$  possède au moins une valeur propre complexe mais ne possède pas  $\lambda$  comme valeur propre (d'après la question 14.). Comme on a supposé  $Sp(f) \subset \{\lambda, \mu\}$  et que le polynôme caractéristique de l'induit divise celui de  $f$ , on en déduit que  $\chi_{f'} = (X - \mu)^d$  avec  $d = \dim(Im(v^p)) \geq 1$ . Par le théorème de Cayley-Hamilton on en déduit  $(f' - \mu Id_{Im(v^p)})^d = 0$ , c'est-à-dire

$$x \in Im(v^p) \implies (f - \mu Id_E)^d(x) = 0_E \implies x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Ker((f - \mu Id_E)^k) = E_\mu^c(f),$$

Dans tous les cas, on a l'inclusion  $Im(v^p) \subset E_\mu^c(f)$ .

Ensuite, en réutilisant la question 13 :

$$E = E_\lambda^c(f) \oplus Im(v^p) \subset E_\lambda^c(f) + E_\mu^c(f) \subset E,$$

donc  $E = E_\lambda^c(f) + E_\mu^c(f)$  et il reste à montrer que cette somme est directe. Pour cela, on reprend les arguments arithmétiques de la preuve du lemme des noyaux : si  $x \in E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f)$ , alors il existe  $p_1, p_2$  dans  $\mathbb{N}^*$  tels que  $(f - \lambda Id_E)^{p_1}(x) = (f - \mu Id_E)^{p_2}(x) = 0_E$ . Or, les polynômes  $(X - \lambda)^{p_1}$  et  $(X - \mu)^{p_2}$  sont premiers entre eux (puisque ils n'ont pas de racine complexe commune), donc il existe  $(U, V) \in \mathbb{C}[X]^2$  tels que

$$U(X - \lambda)^{p_1} + V(X - \mu)^{p_2} = 1.$$

En évaluant cette égalité polynomiale en  $f$ , on obtient

$$Id_E = U(f) \circ (f - \lambda Id_E)^{p_1} + V(f) \circ (f - \mu Id_E)^{p_2},$$

donc

$$x = U(f)((f - \lambda Id_E)^{p_1}(x)) + V(f)((f - \mu Id_E)^{p_2}(x)) = U(f)(0_E) + V(f)(0_E) = 0_E.$$

Ainsi, on a  $E_\lambda^c(f) \cap E_\mu^c(f) = \{0_E\}$  donc  $E = E_\lambda^c(f) \oplus E_\mu^c(f)$ .

**Remarque :** cette question est beaucoup plus simple si on a reconnu les SEV caractéristiques de  $f$  : leur supplémentarité dans  $E$  est un résultat du cours en MP/MPI (on combine le lemme des noyaux et Cayley-Hamilton), mais pas dans la filière PSI, dont était extrait le sujet.

**Partie E : La condition (C2) implique la condition (C1) : cas non bijectif**

16. Puisque  $u = a + b$  avec  $a^2 = b^2 = 0$ , on a

$$u^2 = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = ab + ba,$$

donc

$$au^2 = a(ab + ba) = (a^2)b + aba = aba = (ab)a = (ab + ba)a = u^2a,$$

et

$$bu^2 = b(ab + ba) = bab + (b^2)a = bab = (ba)b = (ba + ab)b = u^2b,$$

donc  $a$  et  $b$  commutent avec  $u^2$ .

17. Notons  $p = 2k$  avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $G = \text{Im}(u^p)$ . Si  $y \in G$ , alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = u^p(x) = u^{2k}(x)$ , donc

$$a(y) = a(\underbrace{(u^2 \circ \dots \circ u^2)}_{k \text{ fois}}(x)),$$

mais  $a$  commute avec  $u^2$ , donc

$$a(y) = \underbrace{(u^2 \circ \dots \circ u^2)}_{k \text{ fois}}(a(x)) = u^p(a(x)) \in \text{Im}(u^p) = G,$$

ce qui montre que  $G$  est stable par  $a$ . De façon identique  $G$  est stable par  $b$ .

Enfin, les endomorphismes induits  $a_G$  et  $b_G$  sont de carré nul car pour tout  $x \in G$ , on a  $a_G^2(x) = a^2(x) = 0_E$  (puisque  $a^2 = 0$ ) et de même pour  $b$ .

18. D'après la question 13. appliquée avec  $\lambda = 0$ , on a

$$E = E_0^c(u) \oplus \text{Im}(u^p),$$

où  $E_0^c(u) = \text{Ker}(u^p) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Ker}(u^k)$  est non nul car il contient  $\text{Ker}(u)$ , lui-même non nul par non bijectivité de  $u$ . Les deux sous-espaces  $F = E_0^c(u)$  et  $G = \text{Im}(u^p)$  sont stables par  $u$  (montré en 13.), donc on peut étudier les endomorphismes induits.

Par la question 14., le scalaire 0 n'est pas valeur propre de l'induit  $u_G$ , donc  $u_G$  est un automorphisme. De plus,  $u_G = a_G + b_G$  avec  $a_G^2 = b_G^2 = 0$  donc d'après la partie C.,

l'induit  $u_G$  est échangeur.

Toujours par la question 14., le second induit  $u_F$  est nilpotent (car possède 0 comme unique valeur propre vu que  $F$  est non nul), donc d'après le résultat admis (tout nilpotent est échangeur),

l'induit  $u_F$  est également échangeur.

Puisque  $E = F \oplus G$ , on en déduit par recollement que  $u$  est échangeur : en effet, il existe des sous-espaces  $F_1, F_2, G_1, G_2$  tels que

$$F = F_1 \oplus F_2, \quad G = G_1 \oplus G_2,$$

$$u(F_1) = u_F(F_1) \subset F_2, \quad u(F_2) = u_F(F_2) \subset F_1, \quad u(G_1) = u_G(G_1) \subset G_2, \quad u(G_2) = u_G(G_2) \subset G_1.$$

En posant  $A = F_1 \oplus G_1$  (la somme est bien directe car  $F_1 \cap G_1 \subset F \cap G = \{0_E\}$ ) et  $B = F_2 \oplus G_2$ , on a bien

$$E = A \oplus B, \quad u(A) \subset u(F_1) + u(G_1) \subset F_2 + G_2 = B, \quad u(B) \subset A.$$

**Partie F : La condition (C3) implique la condition (C1)**

19. Puisque  $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ , on a  $-u \circ \varphi = \varphi \circ u$ , donc

$$\varphi^2 \circ u = \varphi \circ (\varphi \circ u) = \varphi \circ (-u \circ \varphi) = -(\varphi \circ u) \circ \varphi = (u \circ \varphi) \circ \varphi = u \circ \varphi^2,$$

ce qui montre que  $\boxed{\varphi^2 \text{ commute avec } u}$ .

20. Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $\varphi^2$  (elle existe car  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ). Le sous-espace vectoriel  $E_\lambda^c(\varphi^2) = \text{Ker}((\varphi^2 - \lambda Id_E)^p)$  (introduit entre les questions 12. et 13.) est non nul (car il contient  $E_\lambda^c(\varphi^2) = \text{Ker}(\varphi^2 - \lambda Id_E)$ ), lui-même non nul), et on a par la question 13. :

$$E = E_\lambda^c(\varphi^2) \oplus \text{Im}((\varphi^2 - \lambda Id_E)^p).$$

En outre, ces deux supplémentaires sont stables par  $\varphi$  (facile à vérifier) mais aussi par  $u$ , car  $\varphi^2$  commute avec  $u$  : en effet, l'endomorphisme  $(\varphi^2 - \lambda Id_E)^p$  est un polynôme en  $\varphi^2$ , donc il commute avec  $u$ , ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} x \in E_\lambda^c(\varphi^2) &\iff (\varphi^2 - \lambda Id_E)^p(x) = 0_E \\ \implies (\varphi^2 - \lambda Id_E)^p(u(x)) &= u((\varphi^2 - \lambda Id_E)^p(x)) = u(0_E) = 0_E \implies u(x) \in E_\lambda^c(\varphi^2), \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} y \in \text{Im}((\varphi^2 - \lambda Id_E)^p) &\iff \exists x \in E, y = (\varphi^2 - \lambda Id_E)^p(x) \\ \implies u(y) &= u((\varphi^2 - \lambda Id_E)^p(x)) = (\varphi^2 - \lambda Id_E)^p(u(x)) \in \text{Im}(\varphi^2 - \lambda Id_E)^p. \end{aligned}$$

Supposons que  $\text{Im}(\varphi^2 - \lambda Id_E)^p \neq \{0_E\}$ . Dans ce cas, on dispose de deux SEV stables par  $\varphi$  et  $u$ , notés  $F = E_\lambda^c(\varphi^2)$  et  $G = \text{Im}(\varphi^2 - \lambda Id_E)^p$  stables par  $u$ , tels que  $E = F \oplus G$ .

Puisque  $-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ , on a la même chose avec les endomorphismes induits :

$$\begin{aligned} -u_F &= \varphi_F \circ u_F \circ (\varphi^{-1})_F = \varphi_F \circ u_F \circ \varphi_F^{-1}, \\ -u_G &= \varphi_G \circ u_G \circ \varphi_G^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, les endomorphismes induits  $u_F$  et  $u_G$  vérifient la propriété **(C3)**, ce qui contredit l'indécomposabilité supposée de  $u$ . Donc  $\text{Im}(\varphi^2 - \lambda Id_E)^p = \{0_E\}$ , ce qui montre que  $\varphi^2 - \lambda Id_E$  est nilpotent, et donc  $\text{Sp}(\varphi^2 - \lambda Id_E) = \{0\}$ . On en déduit que  $\boxed{\text{Sp}(\varphi^2) = \{\lambda\}}$ .

Enfin,  $\lambda \neq 0$  car  $\varphi^2$  est un automorphisme, donc il existe  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  tel que  $\lambda = \alpha^2$ . Le polynôme  $(X^2 - \lambda)^p = (X - \alpha)^p(X + \alpha)^p$  est donc annulateur de  $\varphi$ , ce qui montre que  $\boxed{\text{Sp}(\varphi) \subset \{-\alpha, \alpha\}}$ .

21. D'après la question 15. appliquée à l'automorphisme  $\varphi$ , on a  $E = E_\alpha^c(\varphi) \oplus E_{-\alpha}^c(\varphi)$ .

Notons que l'hypothèse **(C3)** donne  $-u \circ \varphi = \varphi \circ u$  et donc

$$\forall x \in E, \quad (\varphi - \alpha Id_E)(u(x)) = \varphi(u(x)) - \alpha u(x) = -u((\varphi + \alpha Id_E)(x))$$

puis par récurrence assez simple (ou en développant avec le binôme de Newton) :

$$\forall x \in E, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (\varphi - \alpha Id_E)^k(u(x)) = (-1)^k u((\varphi + \alpha Id_E)^k(x))$$

Soit  $x \in E_{-\alpha}^c(\varphi)$ , c'est à dire que  $(\varphi + \alpha Id_E)^p(x) = 0_E$ . On a alors

$$(\varphi - \alpha Id_E)^p(u(x)) = (-1)^p u((\varphi + \alpha Id_E)^p(x)) = (-1)^p u(0_E) = 0_E$$

et donc  $u(x) \in E_\alpha^c(\varphi)$ . Ainsi  $u(E_{-\alpha}^c(\varphi)) \subset E_\alpha^c(\varphi)$  et de même  $u(E_\alpha^c(\varphi)) \subset E_{-\alpha}^c(\varphi)$ .

En conclusion,  $\boxed{u \text{ est échangeur}}$ .

22. On procède par récurrence forte sur la dimension de l'espace.

- **Initialisation** : on suppose que  $u$  est un endomorphisme d'un espace de dimension 1 qui vérifie **(C3)**. Comme l'espace est de dimension 1,  $u$  est indécomposable et la question précédente montre qu'il est échangeur.

- **Hérédité** : supposons le résultat vrai jusqu'au rang  $n$ .

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace  $E$  de dimension  $n + 1$  et qui vérifie **(C3)**.

Si  $u$  est indécomposable, il est échangeur avec ce qui précède.

Sinon, il existe une décomposition  $E = F \oplus G$  avec  $F$  et  $G$  non nuls stables par  $u$  et tels que  $u_F$  et  $u_G$  vérifient **(C3)**. L'hypothèse de récurrence s'applique à  $u_F$  et  $u_G$  et permet de décomposer  $F$  et  $G$ . Comme en question 18, on en déduit une décomposition de  $E$  qui montre que  $u$  est échangeur.

$\boxed{\text{(C3) implique (C1)}}$