

EXERCICE I

Q1. La matrice produit C de taille $n \times n$ où n est le nombre de lignes et de colonnes de A et de B

a comme coefficient $c_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik}b_{kj}$, d'où le programme :

```
def produit(A, B):
    n = len(A)
    C = [[0 for i in range(n)] for j in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            s = 0
            for k in range(n):
                s += A[i][k] * B[k][j]
            C[i][j] = s
    return C
```

Q2. Si la matrice est symétrique, alors le graphe n'est pas orientée, on compare donc les termes a_{ij} et a_{ji}

pour i et j dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ (on peut diviser le nombre de calculs par 2 et ne faire varier j que dans $\llbracket 0, i-1 \rrbracket$ avec $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$)

```
def oriente(A):
    n = len(A)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if A[i][j] != A[j][i]:
                return True
    return False
```

Q3. Le coefficient de la ligne i et de la colonne j de A^p (noté a_{ij}^p) donne le nombre de chemins de longueur p qui joignent le sommet i au sommet j en p étapes.

On cherche donc la première valeur de p telle que a_{ij}^p soit non nul :

```
def distance(A, i, j):
    p = 1
    B = A
    while B[i][j] == 0:
        p += 1
        B = produit(A, B)
    return p
```

Q4. `SELECT id FROM CLIENTS WHERE ville = "Toulouse"`

Q5. `SELECT CLIENTS.email FROM CLIENTS
JOIN PARTENAIRES ON PARTENAIRES.id client = CLIENTS.id
WHERE PARTENAIRES.partenaire = "SCEI"`

EXERCICE II

On définit la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur \mathbb{R}^2

Q6. Établir que $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur \mathbb{R}

La fonction $d : x \mapsto e^{-x} - x$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et sa dérivée $d' : x \mapsto -e^{-x} - 1$ est négative sur \mathbb{R} .

d est donc strictement décroissante sur \mathbb{R} , comme $d(0) = 1$ et $d(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ car $e > 1$, on en conclut par le théorème des valeurs intermédiaires que $d(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} , c'est à dire que $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur \mathbb{R} , cette solution est un élément de $]0, 1[$, on la note α .

Q7. Démontrer que f admet un unique point critique (x_0, y_0) sur \mathbb{R}^2

f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 et on cherche donc à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - e^{-x} = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \end{cases}$$

f admet donc un unique point critique $A(\alpha, 2\alpha)$ sur \mathbb{R}^2 .

Q8. A l'aide de la matrice Hessienne, démontrer que f admet un extremum local en (x_0, y_0) .

La matrice Hessienne de f en A est $H_f(A) = \begin{pmatrix} 2 + e^{-\alpha} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, son déterminant est strictement positif ($4 + 4e^{-\alpha}$) et sa trace est positive, les deux valeurs propres de la matrice sont strictement positives, c'est donc une matrice symétrique de $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$

et donc $\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2$, $(h, k)H_f(A)\begin{pmatrix} k \\ h \end{pmatrix} > 0$,

A l'aide du développement limité à l'ordre 2 de f en A , on peut dire que, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$

$$f(\alpha + h, 2\alpha + k) = f(\alpha, 2\alpha) + 0 + \frac{1}{2}(h, k)H_f(A)\begin{pmatrix} k \\ h \end{pmatrix} + o_{(h,k) \rightarrow (0,0)}(\|(h, k)\|^2)$$

C'est à dire que sur un voisinage de A , $f(\alpha + h, 2\alpha + k) - f(A) > 0$, ce qui signifie que l'on a en A un minimum local.

PROBLÈME

Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. La fonction $\varphi : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est continue et positive sur $]0, 1]$ ainsi que sur $[1, +\infty[$

En 0, on a $\varphi(t) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{1-\alpha}}$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}} dx$ est intégrable car $1 - \alpha < 1$, donc par théorème des équivalents, la fonction φ est intégrable sur $]0, 1]$.

En $+\infty$, on a $\varphi(t) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ et $\int_0^1 \frac{1}{x^{2-\alpha}} dx$ est intégrable car $2 - \alpha > 1$, donc par théorème des équivalents, la fonction φ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Q10. On a successivement :

$$I(1 - \alpha) = \int_0^1 \frac{x^{-\alpha}}{1+x} dx$$

on effectue le changement de variable $x = \frac{1}{u}$

$$\begin{aligned} I(1 - \alpha) &= \int_{+\infty}^1 \frac{u^\alpha}{1 + \frac{1}{u}} \left(-\frac{du}{u^2} \right) \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{u+1} du \\ &= J(\alpha) \end{aligned}$$

Q11. Pour x fixé dans $]0, 1[$, $f_n(x)$ est le terme général d'une série géométrique et $|f_n(x)| < 1$, la série est donc convergente :

$$\text{On a donc } \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$$

supposons que la série converge uniformément sur $]0, 1[$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = (-1)^n$

Le théorème de la double limite entraînerait que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ converge ce qui n'est pas le cas.

Donc la série ne converge pas uniformément sur $]0, 1[$.

Q12. Comme $S_n(x) = x^{\alpha-1} \sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} (1 - (-x)^{n+1})$.

On note $\varphi_n : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} (1 - (-x)^{n+1})$.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \varphi_n(x)$ est continue sur $[0, 1]$.
- $\forall x \in]0, 1[$, $\varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ et φ est continue par morceau sur $]0, 1[$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0, 1[$, $|\varphi_n(x)| \leq \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \times 2$ et la fonction $x \mapsto 2 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0, 1]$ d'après la question 19.

Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) dx = I(\alpha)$$

$$\text{Comme } \int_0^1 S_n(x) dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{\alpha+k-1} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$$

On en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ que $I(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha+k}$

Q13. Avec la relation de Chasles, on a immédiatement $I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$.

par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 I(\alpha) + J(\alpha) &= I(\alpha) + I(1 - \alpha) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha + k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{-\alpha + 1 + k} \\
 &\text{on effectue le changement d'indice dans la deuxième somme } p = k + 1 \\
 &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha + k} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{-\alpha + p} \\
 &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha + n} - \frac{1}{-\alpha + n} \right) \\
 &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-2\alpha)}{-\alpha^2 + n^2} \\
 I(\alpha) + J(\alpha) &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}
 \end{aligned}$$

Q14. En posant $x = 0$ dans l'expression que l'on admet, on obtient :

$$1 = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right)$$

On en déduit donc avec le résultat de la question précédente que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Q15. Soit $x > 0$, on note $\psi_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$

ψ_x est continue et positive sur $]0, +\infty[$

$\psi_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1 - x < 1$ donc par équivalent avec une intégrale de Riemann, $\int_0^1 \psi_x(t) dt$ converge.

$t^2\psi_x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc $\psi_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\int_1^{+\infty} \psi_x(t) dt$ converge.

Ainsi Γ est bien définie pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Q16. • Pour $x = 0$, on retrouve $f_\alpha(0) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$ d'après la question 14.

• Pour $x > 0$, $\mu : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$

$\mu(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-\alpha}}$ et on prouve comme à la question 9 que $\int_0^1 \mu(t) dt$ converge.

$t^2\mu(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc $\mu(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de

Riemann convergente, $\int_1^{+\infty} \mu(t) dt$ converge.

Ainsi f_α est bien définie sur $[0, +\infty[$.

Démontrons maintenant que f_α est continue sur $[0, +\infty[$.

On note λ la fonction définie sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par $\lambda : (x, t) \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$

- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto \lambda(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$
- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $t \mapsto \lambda(x, t)$ est continue par morceau (car continue) sur $]0, +\infty[$
- Pour tout $(x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[$, $|\lambda(x, t)| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ et $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 9.

Donc, par théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction f_α est continue sur $[0, +\infty[$.

Q17. Soit a et b réels tels que $0 < a < b$, on conserve la notation de λ de la question précédente que l'on définit cette fois sur $[a, b] \times]0, +\infty[$

- $\forall x \in [a, b]$, $t \mapsto \lambda(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question 16 (comme elle est positive, le fait que l'intégrale soit définie équivaut au fait que la fonction soit intégrable).
- $\forall t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto \lambda(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$
- $\forall x \in [a, b]$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-xt}$ est continue sur $]0, +\infty[$
- $\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-at}$ et $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-at}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et c'est un $o_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc elle est intégrable sur $[0, +\infty[$

On peut donc conclure par théorème de dérivation que f_α est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

Ceci étant pour tout a et b de $]0, +\infty[$, on en conclut que f_α est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$,

$$\text{et } f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-xt} dt$$

Q18. On applique cette fois-ci le théorème de convergence dominée généralisée

Soit $x > 0$, on note $\lambda_x : t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$ définie sur $]0, +\infty[$

- $\forall x > 0$, $t \mapsto \lambda_x(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$
- $\forall t \in]0, +\infty[$, $\lambda_x(t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda(t) = 0$ et $t \mapsto 0$ est continue par morceau sur $]0, +\infty[$
- $\forall (x, t) \in (]0, +\infty[)^2$, $|\lambda_x(t)| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ et $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (vu question précédente)

Donc par théorème de convergence dominée généralisée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda_x(t) dt = 0$$

Q19. La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$,

$\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ et $\alpha < 1$ donc par équivalent $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$ converge.

et $t^2 \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, donc $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente, $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$ converge.

On montre ainsi que $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

On a donc, pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$

L'intégrale étant convergente, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = 0$$

Partie III - Vers la formule des compléments

Q20. Avec les calculs précédents et la linéarité de l'intégrale on a :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} + t^\alpha}{t+1} e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt} dt$$

on effectue le changement de variable $u = xt$

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} e^{-u} \frac{1}{x} du = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

Q21. Calcul préliminaire, on note $g : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$

On a g qui est définie d'après la question 19 et de classe \mathcal{C}^1 d'après le théorème fondamental de l'analyse et $g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x^\alpha}$

g_α est donc de classe \mathcal{C}^1 comme produit de fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

et on a

$$\begin{aligned} g'_\alpha(x) &= \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt + \Gamma(\alpha) e^x \left(-\frac{e^{-x}}{x^\alpha} \right) \\ &= g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

Considérons l'équation différentielle : $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$ pour $x > 0$

L'équation sans second membre associée est $y' - y = 0$ dont les solutions sont $y(x) = k e^x$ où k est un réel.

Comme g_α est une solution particulière de l'équation les solutions de l'équation complète sont $y(x) = k e^x + g_\alpha(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

f_α étant solution de cette équation, on en déduit qu'il existe un réel k tel que pour tout $x > 0$, $f_\alpha(x) = k e^x + g_\alpha(x)$.

Il reste à déterminer la valeur de k .

On a de l'équation précédente l'égalité $e^{-x} f_\alpha(x) = k + \Gamma(\alpha) \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$

En utilisant les résultats des questions 18 et 19, on obtient en faisant tendre x vers $+\infty$ que $k = 0$.

On conclut ainsi que $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

Q22. En posant $x = 0$ dans l'égalité précédente, on aurait l'égalité souhaitée, mais l'égalité ne vaut que pour $x > 0$.

On sait d'après la question 16 que f_α est continue sur $[0, +\infty[$

On a donc :

$$\begin{aligned} f_\alpha(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) \quad (\text{par continuité de } f_\alpha \text{ en } x = 0) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} g_\alpha(x) \quad (\text{car } f_\alpha = g_\alpha \text{ pour } x > 0) \\ &= \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt \end{aligned}$$

D'autres part, comme $f_\alpha(0) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt$, on obtient l'égalité demandée.

Q23. On sait d'après la question 14 que $f_\alpha(0) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$

avec l'égalité de la question précédente, on a donc

$$\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} t^{-\alpha} e^{-t} dt = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$$

Q24. On pose $u = t^2$ dans l'intégrale, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Par ailleurs, avec la question précédente et $\alpha = \frac{1}{2}$, on a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}\pi)} = \pi$

On en déduit que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (car $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$ comme intégrale d'une fonction positive)

Et donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

FIN