Corrigé du DS05 du 22/11/2025 (4h)
Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 3 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 :

1. Pour toute fonction $f \in E$, on a facilement

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty,$$

donc la norme $\|.\|_\infty$ domine $\|.\|_1$, mais pas l'inverse. En effet, si on considère la suite $f_n : t \mapsto t^n$, on a $f_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty = 1$, alors que $\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, la suite (f_n) tend vers la fonction nulle 0_E pour la norme $\|.\|_1$, mais pas pour la norme $\|.\|_\infty$, donc ces deux normes ne sont pas équivalentes.

2. (a) En tant qu'évaluation, l'application $u : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}\right.$ est linéaire.
De plus, pour tout $f \in E$:

$$|u(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty,$$

donc u est continue pour la norme $\|.\|_\infty$ (par le critère de continuité des applications linéaires entre EVN).

(b) Montrons que la partie $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$ est fermée dans $(E, \|.\|_\infty)$ par la caractérisation ensembliste de la continuité : puisque $F = u^{-1}(\{0\})$, que $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et que $u : (E, \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |.|)$ est continue (par la question précédente), on en déduit que F est un fermé de $(E, \|.\|_\infty)$.

3. (a) La suite $(f_n)_{n\geq1}$ est une suite de fonctions affines par morceaux sur $[0, 1]$, et chaque f_n a pour graphe la ligne brisée joignant les points $(0, 0)$, $(\frac{1}{n}, 1)$ et $(1, 1)$. Chaque f_n est continue sur $[0, 1]$ (car affine par morceaux), donc $f_n \in E$, et on a :

$$\|f_n - c\|_1 = \int_0^1 |f_n - c| = \int_0^{1/n} |f_n - 1|$$

(puisque $f_n = c = 1$ sur $[1/n, 1]$), donc

$$\|f_n - c\|_1 = \int_0^{1/n} (1 - nx)dx = \frac{1}{n} - \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}.$$

(b) Le calcul précédent montre que la suite (f_n) converge dans l'EVN $(E, \|.\|_1)$ vers la fonction constante $c = 1$. Mais cette fonction n'est pas dans F ($c(0) = 1 \neq 0$), alors que la suite (f_n) est à valeurs dans F ($\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$).
Donc par le critère séquentiel, F n'est pas fermée.

* * *

Exercice 2 :

1. (a) Pour toutes suites x, y dans l^2, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n y_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{n\in\mathbb{N}} (x_n^2 + y_n^2) = \frac{1}{2} \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n^2 < +\infty,$$

donc la série $\sum x_n y_n$ converge absolument, ce qui montre sa convergence.

(b) La suite nulle est dans l^2 car $\sum 0^2$ converge (série nulle).
Si x, y sont dans l^2 et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda x + y$ est dans l^2 car

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda x_n + y_n)^2 = \lambda^2 x_n^2 + 2\lambda x_n y_n + y_n^2,$$

donc la série $\sum(\lambda x_n + y_n)^2$ converge (comme somme de trois séries convergentes, notamment d'après la question précédente).
On en déduit que l^2 est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'EV des suites réelles).

(c) L'opération $(x, y) \mapsto (x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ est bien définie de $l^2 \times l^2$ dans $\mathbb{R}$ (d'après 1.(a)).
De plus, cette opération est clairement une forme bilinéaire symétrique (par bilinéarité et symétrie du produit réel et linéarité de la somme infinie). Ensuite, cette forme bilinéaire symétrique est définie positive car pour tout $x \in l^2$, $(x|x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 \geq 0$ (SATP CV), et si $(x|x) = 0$ alors la SATP est nulle, donc tous ses termes sont nuls, ce qui mène à $x_n^2 = 0$ pour tout n, donc $x = 0$ (la suite nulle).
On a donc bien un produit scalaire sur l^2.

2. (a) A $p \in \mathbb{N}$ fixé, l'évaluation $\varphi : \begin{cases} l^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x_p = x(p) \end{cases}$ est clairement une forme linéaire.
De plus, pour tout $x \in l^2$:

$$|\varphi(x)| = |x_p| = \sqrt{x_p^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2} = \sqrt{(x|x)} = \|x\|,$$

donc φ est continue.

(b) Rappelons que $|||\varphi||| = \sup\limits_{x \in l^2 \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}$.
L'inégalité linéaire précédente montre que $|||\varphi||| \leq 1$.
Avec la suite $e^{(p)}$ définie par $e_k^{(p)} = \delta_{k,p}$ (tous les termes sont nuls sauf celui d'indice p qui vaut 1), on a bien $e^{(p)} \in l^2$ (suite presque nulle), ainsi que

$$|\varphi(e^{(p)})| = |e_p^{(p)}| = 1 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} {e_n^{(p)}}^2} = \|e^{(p)}\|.$$

Ceci montre que $|||\varphi||| = 1$ (le sup est atteint en $x = e^{(p)}$).

3. (a) Déjà, $F \subset l^2$ car si x est nulle à partir d'un certain rang, alors la série $\sum x_n^2$ converge (somme finie).
Ensuite, la suite nulle est nulle à partir du rang 0, donc elle est dans F.
Enfin, si x et y sont dans F, alors x est nulle à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et y est nulle à partir d'un rang $n_1 \in \mathbb{N}$, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite $\lambda x + y$ est nulle à partir du rang $\max(n_0, n_1)$, ce qui montre que $\lambda x + y$ est dans F.
Ainsi, F est un SEV de l^2.

(b) Si $x \in F^\perp$, alors en particulier $(x|e^{(p)}) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ (où comme dans la question 2.(b)., $e^{(p)}$ désigne la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice p qui vaut 1), puisque toutes les suites $e^{(p)}$ sont dans F. Ainsi $0 = (x|e^{(p)}) = x_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, donc $x = 0$. Ceci montre que $F^\perp \subset \{0\}$, et l'inclusion réciproque est toujours vraie, donc $F^\perp = \{0\}$.

(c) D'après la question précédente, on a $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = l^2$, donc $F \subsetneq (F^\perp)^\perp$, puisque $F \subsetneq l^2$: en effet certaines suites sont dans l^2 sans être nulles APCR, par exemple $x_n = \frac{1}{n+1}$ (puisque $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$).

* * *

Exercice 3 : Polynômes de Hermite

Adaptation du corrigé d'Edouard Lucas, professeur en MP au lycée Michelet (Vanves, 92)

Première partie : questions préliminaires

1. 1.a. On suppose P et Q n'ont aucune racine complexe commune. Par l'absurde si P et Q ne sont pas premiers entre eux, ceci nous fournirait $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg R \geqslant 1$, $R|P$ et $R|Q$. Comme R est non constant, le théorème de d'Alembert-Gaüss nous fournit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $R(\lambda) = 0$. Or il existe P_1 et Q_1 tel que $P = P_1 R$ et $Q = Q_1 R$ car $R|P$ et $R|Q$, donc $P(\lambda) = Q(\lambda) = 0$. Ainsi, P et Q ont une racine complexe commune, ce qui est absurde. D'où $\boxed{\text{si } P \text{ et } Q \text{ n'ont aucune racine complexe commune, alors } P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux.}}$

1.b. On suppose que P et Q divisent un troisième polynôme R. Ceci nous fournit U et V tel que $PU = QV = R$, donc $Q|PU$ et $Q \wedge P = 1$. Ainsi, le théorème de Gauss s'applique et on a $Q|U$, ce qui nous fournit W tel que $U = WQ$ donc $R = PU = PQW$, et on déduit $PQ|R$. On a donc montré que :
$\boxed{\text{si } P \text{ et } Q \text{ divisent un troisième polynôme } R \text{ à coefficients complexes, alors } PQ \text{ divise } R}$.

2. Pour $p \in [\![1, n]\!]$, on considère la propriété $\mathbb{P}_p$: $Q_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{P_i'}{P_i}$, où $Q_p = \dfrac{\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{p} P_i\right)'}{\displaystyle\prod_{i=1}^{p} P_i}$.

- <u>Initialisation</u> : Pour $p = 1$ c'est évident.
  Pour $p = 2$, on a $Q_2 = \dfrac{(P_1P_2)'}{P_1P_2} = \dfrac{P_1'P_2 + P_1P_2'}{P_1P_2} = \dfrac{P_1'}{P_1} + \dfrac{P_2'}{P_2}$, donc $Q_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \frac{P_i'}{P_i}$.
- <u>Hérédité</u> : Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\mathbb{P}_p$. Montrons $\mathbb{P}_{p+1}$, c'est à dire $Q_{p+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} \frac{P_i'}{P_i}$.
  On a
  $$Q_{p+1} = \frac{\left[\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{p} P_i\right) \times P_{p+1}\right]'}{\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{p} P_i\right) \times P_{p+1}} = Q_p + \frac{P_{p+1}'}{P_{p+1}}$$
  (en dérivant comme pour $p = 2$) et avec l'hypothèse de récurrence :
  $$Q_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} \frac{P_i'}{P_i} + \frac{P_{p+1}'}{P_{p+1}} = \sum_{i=1}^{p+1} \frac{P_i'}{P_i},$$
  d'où $\mathbb{P}_{p+1}$.
- <u>Conclusion :</u> On a montré par récurrence $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}_p$.

En particulier, on a $\mathbb{P}_n$ or $Q_n = Q$, ce qui permet de conclure : $\boxed{Q = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'}{P_i}}$.

Deuxième partie : interpolation de Hermite

3. Définition du polynôme interpolateur de Hermite

3.a. On suppose $P(a) = P'(a) = 0$.

La formule de Taylor polynomiale s'écrit $\forall Q \in \mathbb{K}[X],\ Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{\deg(Q)} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} X^k$.

On l'applique au polynôme $Q = P(X+a)$ qui vérifie $Q^{(k)} = P^{(k)}(X+a)$ par récurrence immédiate. On obtient

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k = \sum_{k=2}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k.$$

Ainsi $P(X) = \displaystyle\sum_{k=2}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = (X-a)^2 \sum_{k=2}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-2}$.

Or, $\displaystyle\sum_{k=2}^{\deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^{k-2}$ est un polynôme donc $\boxed{\text{si } P(a) = P'(a) = 0 \text{ alors } (X-a)^2 \text{ divise } P}$.

3.b. • Linéarité : En utilisant la linéarité de la dérivation, on a pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$ donc φ est linéaire.

- $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$: On sait que $\operatorname{Ker}\varphi \supset \{0\}$. On va montrer que $\operatorname{Ker}\varphi \subset \{0\}$.
  Soit $P \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que $\varphi(P) = 0$. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a $P(x_i) = P'(x_i) = 0$ donc $(X - x_i)^2$ divise P selon **3.a**.
  Par récurrence immédiate, on peut généraliser la question **1.** : si $P_1, \cdots P_p$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux qui divisent P alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{p} P_i$ divise P.
  En appliquant ceci aux polynômes $(X - x_i)^2$, on obtient $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - x_i)^2$ divise P.
  Or $\deg\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - x_i)^2\right) = 2p$ et $\deg P \leqslant 2p - 1$ donc $P = 0$.
- φ bijective : On vient de voir que φ est linéaire injective. D'après le théorème du rang : $\operatorname{rg}\varphi = \dim(\mathbb{R}_{2p-1}[X]) - \dim \operatorname{Ker}(\varphi) = 2p$ donc $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim \mathbb{R}^{2p}$ et $\operatorname{Im}\varphi \subset \dim \mathbb{R}^{2p}$ donc $\operatorname{Im}\varphi = \dim \mathbb{R}^{2p}$, ce qui donne la surjectivité d'où φ est bijective.

En conclusion, $\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire bijective de } \mathbb{R}_{2p-1}[X] \text{ sur } \mathbb{R}^{2p}}$.

3.c. Le $2p$-uplet $(a_1, \cdots, a_p, b_1, \cdots, b_p) \in \mathbb{R}^{2p}$ admet un unique antécédent par φ noté P_H donc $\boxed{\text{il existe un unique polynôme } P_H \in \mathbb{R}_{2p-1}[X] \text{ tel que } \forall i \in [\![1,p]\!],\ P_H(x_i) = a_i \text{ et } P_H'(x_i) = b_i}$.

4. Étude d'un exemple

Soit $P = x + yX + zX^2 + tX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ (où $x, y, z, t \in \mathbb{R}$) le polynôme d'interpolation de Hermite lorsque $p = 2$, $(x_1, x_2) = (-1, 1)$ et $(a_1, a_2, b_1, b_2) = (1, 0, -1, 2)$. On a donc

$$\left\{\begin{array}{l} P(-1) = 1 \\ P(1) = 0 \\ P'(-1) = -1 \\ P'(1) = 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccccc} x & -y & +z & -t & = & 1 \\ x & +y & +z & +t & = & 0 \\ & y & -2z & +3t & = & -1 \\ & y & +2z & +3t & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -1/4 \\ y = -1 \\ z = 3/4 \\ t = 1/2 \end{array}\right.$$

(résolution classique avec le pivot de Gaüss).

Donc $\boxed{\text{pour cet exemple on trouve : } P_H = -\frac{1}{4} - X + \frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{2}X^3 = \tfrac{1}{4}(2X^3 + 3X^2 - 4X - 1)}$.

5. Une formule explicite

5.a. Si $p \neq 2$, les x_k pour $k \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}$ sont des racines de multiplicité 2 de Q_i donc $Q_i(x_k) = Q_i'(x_k) = 0$ et $Q_i(x_i) = \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \left(\frac{x_i - x_j}{x_i - x_j}\right)^2 = 1$.

On applique la question **2.** à $Q_i = \displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} P_j$ où $P_j = \left(\dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}\right)^2$: ainsi, $Q_i' = Q_i \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \frac{P_j'}{P_j}$.

Or pour $j \neq i$, on a $P_j' = \dfrac{2(X - x_j)}{(x_i - x_j)^2}$ donc $\dfrac{P_j'}{P_j} = \dfrac{2}{X - x_j}$ et $\dfrac{P_j'(x_i)}{P_j(x_i)} = \dfrac{2}{x_i - x_j}$.

Donc $\boxed{Q_i(x_k) = Q_i'(x_k) = 0 \text{ si } k \neq i \quad \text{et} \quad Q_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad Q_i'(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \frac{2}{x_i - x_j}}$.

Nous avions supposé en début de question que $p \geq 2$, mais la formule reste valable si $p = 1$: on a dans ce cas $Q_1 = 1$ (produit vide) et $Q_1' = 0$ et donc $Q_1'(x_1) = 0$ (somme vide).

5.b. Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a $\deg(Q_i) = 2p - 2$ (valable même si $p = 1$) et $\deg\Big[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i)b_i\Big] \leqslant 1$. Par produit :

$$\deg\left(\Big[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i)b_i\Big]Q_i\right)$$

$$= \deg\Big[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i)b_i\Big] + \deg(Q_i) \leqslant 2p - 1.$$

Par somme on obtient $\deg P \leqslant 2p - 1$, c'est-à-dire $P \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$.
Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Montrons maintenant que $P(x_j) = a_j$ et $P'(x_j) = b_j$:

$$\begin{aligned}
P(x_j) &= \left(\sum_{i=1}^{p} \Big[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i)b_i\Big]Q_i\right)_{X=x_j} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \Big[(1 - Q_i'(x_i)(x_j - x_i))\, a_i + (x_j - x_i)b_i\Big] \underbrace{Q_i(x_j)}_{=\delta_{i,j}} \\
&= \left(1 - Q_j'(x_j)\underbrace{(x_j - x_j)}_{=0}\right) a_j + \underbrace{(x_j - x_j)}_{=0} b_j \\
&= a_j.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P'(x_j) &= \left(\sum_{i=1}^{p} \Big[-Q_i'(x_i)a_i + b_i\Big]Q_i + \sum_{i=1}^{p} \Big[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i)b_i\Big]Q_i'\right)_{X=x_j} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \Big[-Q_i'(x_i)a_i + b_i\Big] \underbrace{Q_i(x_j)}_{=\delta_{i,j}} + \sum_{i=1}^{p} \Big[(1 - Q_i'(x_i)(x_j - x_i))\, a_i + (x_j - x_i)b_i\Big] \underbrace{Q_i'(x_j)}_{=0 \text{ si } i\neq j} \\
&= \Big[-Q_j'(x_j)a_j + b_j\Big] + \left[\left(1 - Q_j'(x_j)\underbrace{(x_j - x_j)}_{=0}\right) a_j + \underbrace{(x_j - x_j)}_{=0} b_j\right] Q_j'(x_j) \\
&= -a_j Q_j'(x_j) + b_j + a_j Q_j'(x_j) = b_j.
\end{aligned}$$

Ainsi, par l'unicité établie en **3.c.** :

$\boxed{P = \sum_{i=1}^{p} \Big[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i)b_i\Big]Q_i \text{ est le polynôme d'interpolation de Hermite}}$.

5.c. Comme dans la question **4.**, on suppose $p = 2$, $(x_1, x_2) = (-1, 1)$ et $(a_1, a_2, b_1, b_2) = (1, 0, -1, 2)$. Donc :

$$Q_1 = \frac{(X-1)^2}{4}, \quad Q_1' = \frac{X-1}{2}, \quad Q_2 = \frac{(X+1)^2}{4}, \quad Q_2' = \frac{X+1}{2},$$

$$Q_1'(x_1) = -1, \quad Q_2'(x_2) = 1.$$

La formule de la question précédente donne alors

$$\begin{aligned}
P &= \Big[(1 - Q_1'(x_1)(X - x_1))\, a_1 + (X - x_1)b_1\Big]Q_1 + \Big[(1 - Q_2'(x_2)(X - x_2))\, a_2 + (X - x_2)b_2\Big]Q_2 \\
&= \Big[(1 + (X + 1)) - (X + 1)\Big]Q_1 + \Big[(1 - (X - 1)) * 0 + (X - 1) * 2\Big]Q_2,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire
$$P = Q_1 + (2X-2)Q_2 = \frac{1}{4}((X-1)^2 + (2X-2)(X+1)^2).$$

En développant, $\boxed{\text{on retrouve bien } P = \frac{1}{2}X^3 + \frac{3}{4}X^2 - X - \frac{1}{4}}$, comme en **4.**

Troisième partie : polynômes de Hermite

6.

Initialisation : On a bien H_0 unitaire et de degré 0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n soit un polynôme unitaire de degré n.
On a $\deg(XH_n) = \deg(X) + \deg(H_n) = 1 + n > n - 1 \geqslant \deg(H_n')$
donc $H_{n+1} = XH_n - H_n'$ est de degré $n+1$ (vu que $\deg(H_{n+1}) = \deg(XH_n)$) et unitaire (le coefficient dominant de H_{n+1} est le même que celui de H_n, donc 1).
Conclusion : On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ H_n \text{ est un polynôme unitaire de degré } n}$.

7. Initialisation : On a $H_0 = 1$ et $H_1 = X$ ainsi on a bien $H_{0+1}' = (0+1)H_0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.
On a $H_{n+2}' = (XH_{n+1} - H_{n+1}')' = XH_{n+1}' + H_{n+1} - H_{n+1}'' = (n+1)XH_n + XH_n - H_n' - (n+1)H_n'$
donc $H_{n+2}' = (n+2)(XH_n - H_n') = (n+2)H_{n+1}$.
Conclusion : On a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ H_{n+1}' = (n+1)H_n}$.

8. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

8.a. Soit P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$.
Par croissance comparée on a $x^2P(x)Q(x)f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $P(x)Q(x)f(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(1/x^2)$.
Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc par comparaison à une fonction positive, la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
De façon analogue la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur $]-\infty, -1]$.
Ainsi la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui montre que
$\boxed{\text{pour tous polynômes } P \text{ et } Q \text{ dans } \mathbb{R}[X], \text{ on a l'existence de l'intégrale qui définit } \langle P \mid Q\rangle}$.

8.b. Soit P, Q et $R \in \mathbb{R}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons $\begin{cases} (i) & \langle \lambda P + R \mid Q\rangle = \lambda\langle P \mid Q\rangle + \langle R \mid Q\rangle \\ (ii) & \langle P \mid Q\rangle = \langle Q \mid P\rangle \\ (iii) & \langle P \mid \lambda Q + R\rangle = \lambda\langle P \mid Q\rangle + \langle P \mid R\rangle \\ (iv) & \langle P \mid P\rangle \geqslant 0 \\ (v) & \langle P \mid P\rangle = 0 \Longrightarrow P = 0 \end{cases}$.

Pour (i) On a bien $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda P(x) + R(x))Q(x)f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}P(x)Q(x)f(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty}R(x)Q(x)f(x)\mathrm{d}x$ (linéarité de l'intégrale impropre).

Pour (ii) On a bien $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}P(x)Q(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}Q(x)P(x)f(x)\mathrm{d}x$.

Pour (iii) vrai avec (i) et (ii).

Pour (iv) On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ P^2(x)f(x) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P^2(x)f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc $\langle P \mid P\rangle \geqslant 0$.

Pour (v) On suppose $\langle P \mid P\rangle = 0$.

On a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} P^2(x)f(x)\mathrm{d}x = 0$, or la fonction $x \mapsto P^2(x)f(x)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, donc $\forall x \in \mathbb{R},\ P^2(x)f(x) = 0$. Or, f ne s'annule pas ($f > 0$) donc $\forall x \in \mathbb{R},\ P^2(x) = 0$.
Ainsi P admet une infinité de racines donc $P = 0$ (le polynôme nul).

$\boxed{\text{On a démontré que l'on définit ainsi un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X].}$

9. Une famille orthogonale

9.a. On va encore effectuer une démonstration par récurrence.
Initialisation : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a $\langle P \mid H_0\rangle = \langle P^{(0)} \mid H_0\rangle$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \langle P \mid H_n\rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0\rangle$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a $\langle P \mid H_{n+1}\rangle = \langle P \mid XH_n - H_n'\rangle = \langle P \mid XH_n\rangle - \langle P \mid H_n'\rangle$.

Sous réserve d'existence, on effectue une intégration par parties généralisée sur le premier terme avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto f(x) \ \text{ et } \ x \mapsto P(x)H_n(x).$$

On obtient alors :

$$\langle P \mid XH_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \times P(x)H_n(x)\mathrm{d}x$$

$$= [-f(x) \times P(x)H_n(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times (P'(x)H_n(x) + P(x)H_n'(x))\mathrm{d}x.$$

On a $[(P(x)H_n(x))f(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ par croissance comparée, ce qui valide l'IPP.
Finalement on obtient

$$\langle P \mid XH_n \rangle = \langle P \mid H_n' \rangle + \langle P' \mid H_n \rangle,$$

donc

$$\langle P \mid H_{n+1} \rangle = \langle P' \mid H_n \rangle = \langle (P')^{(n)} \mid H_0 \rangle$$

par hypothèse de récurrence (appliquée au polynôme P').

On a donc établi $\langle P \mid H_{n+1} \rangle = \langle P \mid H_{n+1} \rangle = \langle P^{(n+1)} \mid H_0 \rangle$ d'où l'hérédité
Conclusion : On a montré par récurrence que
$\boxed{\text{pour tout } P \in \mathbb{R}[X] \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \langle P \mid H_n \rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0 \rangle}$.

9.b. D'après ce qui précède, pour tout P tel que $\deg P < n$, on a $\langle P \mid H_n \rangle = \langle 0 \mid H_0 \rangle = 0$ donc si $0 \leqslant i < j$, on a $\deg(H_i) = i < j$ d'après **6.** donc $\langle H_i \mid H_j \rangle = 0$.
La famille $(H_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est donc orthogonale et formée de $n+1$ vecteurs non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$, elle est donc libre. Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$, on conclut que
$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ (H_0, H_1, \ldots, H_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[X]}$.

9.c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\|H_n\|^2 = \langle H_n \mid H_n \rangle = \langle H_n^{(n)} \mid H_0 \rangle$ d'après **9.a**.
En utilisant **7.**, $H_n^{(n)} = (H_n')^{(n-1)} = n(H_{n-1}')^{(n-1)} = \cdots = n!H_0^{(0)} = n!H_0$,
donc $\|H_n\|^2 = n!\langle H_0 \mid H_0 \rangle = n! \int_{\mathbb{R}} f = n!$ (l'énoncé admet que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$).
D'où $\boxed{\|H_n\| = \sqrt{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

9.d. Par définition récursive des polynômes de Hermite, nous avons
$\boxed{H_1 = X,\ H_2 = X^2 - 1 \text{ et } H_3 = X(X^2-1) - 2X = X^3 - 3X}$.
La famille $(\frac{1}{\sqrt{i!}}H_i)_{0 \leqslant i \leqslant 3}$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ d'après **9.b.** et **9.c.**. Comme $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$ et que les vecteurs sont libres (car orthonormés), alors il s'agit d'une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$.
Décomposons $P = X^3 + X^2 + X + 1$ dans cette BON : on a $P - H_3 = X^2 + 4X + 1$ puis $P - H_3 - H_2 = 4X + 2 = 4H_1 + 2H_0$ donc $\boxed{P = 2.H_0 + 4.H_1 + 1.H_2 + 1.H_3}$
Ainsi le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_0[X]$ est $2H_0 \in \mathbb{R}_0[X]$ car $4.H_1 + 1.H_2 + 1.H_3 \in \mathbb{R}_0[X]^\perp$ donc la distance cherchée est $\|4.H_1 + 1.H_2 + 1.H_3\| = \|\frac{4}{\sqrt{1!}}.H_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2!}}.H_2 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3!}}.H_3\|$
Comme $(\frac{1}{\sqrt{1!}}.H_1, \frac{1}{\sqrt{2!}}.H_2, \frac{1}{\sqrt{3!}}.H_3)$ est une famille orthonormale,
on a : $\|4.H_1 + 1.H_2 + 1.H_3\| = \sqrt{4^2 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{24}$, on trouve $\boxed{d = d(P, \mathbb{R}_0[X]) = \sqrt{24}}$.

10. Étude des racines des polynômes H_n

10.a. On suppose $p < n$. On remarque que $(H_0, \ldots, H_p)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après **9.b.**, donc $S \in \mathrm{vect}(H_0, \ldots, H_p)$ et comme $(H_0, \ldots, H_p, H_{p+1}, \ldots, H_n)$ est une famille orthonormale, on a $S \perp H_n$ donc $\boxed{\text{si } p < n, \text{ alors } \langle S \mid H_n \rangle = 0}$.

10.b. On décompose H_n produit d'éléments irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:

$$H_n = \prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{\lambda_i} \cdot \prod_{i=1}^{q}(X-b_i)^{\lambda'_i} \cdot \prod_{i=1}^{l}(X^2+\alpha_i X+\beta_i)^{\mu_i},$$

où p, q, l sont des entiers, les λ_i sont des entiers impairs, les b_i sont les racines H_n d'ordre pair λ'_i, les $X^2+\alpha_i X+\beta_i$ sont des polynômes de discriminant strictement négatifs, et les μ_i entiers.

On a donc

$$SH_n = \prod_{i=1}^{p}(X-a_i)^{\lambda_i+1} \cdot \prod_{i=1}^{q}(X-b_i)^{\lambda'_i} \cdot \prod_{i=1}^{l}(X^2+\alpha_i X+\beta_i)^{\mu_i}.$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+\alpha_i x+\beta_i > 0$, $(x-a_i)^{\lambda_i+1} \geqslant 0$ et $(x-b_i)^{\lambda'_i} \geqslant 0$ (exposants pairs), donc $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ S(x)H_n(x) \geqslant 0}$.

10.c. Par l'absurde : si H_n n'a pas n racines réelles distinctes, notons S et p définis comme ci-dessus. On a donc $p < n$.

Ainsi d'après **10.a.** :

$$\int_{\mathbb{R}} S(x)H_n(x)f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Or d'après **10.b.** :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(x)H_n(x)f(x) \geqslant 0.$$

De plus $x \mapsto S(x)H_n(x)f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(x)H_n(x)f(x) = 0$.

Comme f ne s'annule pas, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $S(x)H_n(x) = 0$, donc SH_n est le polynôme nul car admettant une infinité de racines.

Comme $\mathbb{R}[X]$ est intègre, S ou H_n est nul ce qui est absurde.

On en déduit que $\boxed{H_n \text{ possède } n \text{ racines réelles distinctes}}$.

* * *