DS05 du 20/01/2024 (4h)
Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.
On pose $\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{(x|x)}$. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme vérifiant $\forall x \in E,\ (u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   - (i) $u \circ u^* = u^* \circ u$;
   - (ii) $\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$;
   - (iii) $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.

* * *

Exercice 2

On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, t \in]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$.

1. Démontrer que : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
   On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

* * *

Exercice 3

Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ une série absolument convergente à termes complexes.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,+\infty[$.

$$g_n(t) = \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t}.$$

1. Montrer que la suite (a_n) est bornée.
2. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} g_n$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^+$, et en déduire que $S : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!} e^{-t} \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

* * *

Exercice 4 : Problème

Dans tout ce problème, α est un réel de l'intervalle $]0,1[$. On pose

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

1. Démontrer que $x \mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.
2. Démontrer que $J(\alpha) = I(1-\alpha)$.

   On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.
3. 1$^{\text{ère}}$ tentative
   Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $f_n(x) = (-1)^n x^{n+\alpha-1}$. Montrer que

   $$\forall x \in]0,1[, \quad \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

   La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,1[$?
4. 2$^{\text{ème}}$ tentative
   Pour tout $x \in]0,1[$, on pose :

   $$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1}$$

   A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

   $$I(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x$$

   En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.
5. En déduire que :

   $$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$$

   On admet la formule suivante :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2 - n^2}\right)$$
6. Démontrer que :

   $$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite on pose :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

7. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

8. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
9. Démontrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
10. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha(x)$.
11. Démontrer que $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En déduire :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t.$$

Partie III - Vers la formule des compléments

12. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$$

13. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.
En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

14. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} \, \mathrm{d}t = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t$$

15. Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

16. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$