DS05 du 22/11/2025 (4h)
Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 3 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 :

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E$, $||f||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

1. Les normes $|| \, ||_\infty$ et $|| \, ||_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
2. Dans cette question, on munit E de la norme $|| \, ||_\infty$.
   (a) Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$
   Prouver que u est une application continue sur E.
   (b) On pose $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$.
   Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $|| \, ||_\infty$.
3. Dans cette question, on munit E de la norme $|| \, ||_1$.
   Soit $c : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$, ainsi que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \left\{ \begin{array}{lll} nx & \text{si} & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ 1 & \text{si} & \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{array} \right.$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $||f_n - c||_1$.*On pourra s'aider d'un dessin !*
   (b) On pose $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$. F est-elle une partie fermée de E pour la norme $|| \, ||_1$?

* * *

Exercice 2 :

On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.
   On pose alors $(x|y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.
   (b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
   (c) Montrer que $(\, | \,)$ est un produit scalaire dans l^2.

   On suppose maintenant que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $|| \, ||$:
   $$\forall x \in l^2, \qquad \|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   (a) Démontrer que $\varphi : l^2 \to \mathbb{R}$ est une application linéaire et continue.
   (b) Déterminer la norme d'opérateur $|||\varphi|||$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l^2.
   (b) Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\, | \,)$).
   (c) Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

* * *

Exercice 3 : Polynômes de Hermite

Les deux premières parties du problème sont indépendantes. La deuxième partie étudie un exemple d'interpolation de Hermite et la troisième partie quelques propriétés d'une famille de polynômes qui portent le nom de ce même mathématicien.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On note $\mathbb{R}(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients réels.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P' le polynôme dérivé de P et, pour tout entier naturel n, on note $P^{(n)}$ le n-ième polynôme dérivé de P. Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Première partie : questions préliminaires

Soit n un entier naturel non nul.

1. Soit P et Q deux polynômes non nuls à coefficients complexes.

1.a. Démontrer que si P et Q n'ont aucune racine complexe commune, alors P et Q sont premiers entre eux (on pourra raisonner par l'absurde).

1.b. On suppose que P et Q sont premiers entre eux. En utilisant le théorème de Gauss, démontrer que si P et Q divisent un troisième polynôme R à coefficients complexes, alors il en est de même pour le polynôme PQ.

2. Soit $(P_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$. On considère le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et la fraction rationnelle $Q \in \mathbb{R}(X)$ définis par $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$ et $Q = \dfrac{P'}{P}$.

Démontrer par récurrence que $Q = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{P_i'}{P_i}$.

Deuxième partie : interpolation de Hermite

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, p un entier naturel non nul, $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille d'éléments de I distincts deux à deux et $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ deux familles de réels quelconques.

3. Définition du polynôme interpolateur de Hermite

3.a. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Taylor, démontrer que :
si $P(a) = P'(a) = 0$ alors $(X-a)^2$ divise P.

3.b. En utilisant la question préliminaire **1**, démontrer que l'application φ de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^{2p}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(x_1), P(x_2), \cdots, P(x_p), P'(x_1), P'(x_2), \cdots, P'(x_p))$$

est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2p}$.

3.c. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P_H \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que, pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant p$, on a $P_H(x_i) = a_i$ et $P_H'(x_i) = b_i$.
Le polynôme P_H est appelé polynôme interpolateur de Hermite.

4. Étude d'un exemple
Déterminer le polynôme d'interpolation de Hermite (défini à la question **3**) lorsque $p = 2$, $x_1 = -1, x_2 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = -1$ et $b_2 = 2$.

5. Une formule explicite

Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant p$, on considère le polynôme $Q_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \left(\dfrac{X - x_j}{x_i - x_j}\right)^2$.

5.a. Soit i un entier vérifiant $1 \leqslant i \leqslant p$. Calculer $Q_i(x_k)$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p$ et démontrer qu'on a

$$Q_i'(x_k) = 0 \text{ si } k \neq i \quad \text{et} \quad Q_i'(x_i) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} \frac{2}{x_i - x_j}$$

On pourra utiliser la question préliminaire **2**.

5.b. Démontrer que le polynôme P défini par la formule

$$P = \sum_{i=1}^{p} \Big[(1 - Q_i'(x_i)(X - x_i))\, a_i + (X - x_i) b_i \Big] Q_i$$

est le polynôme d'interpolation de Hermite défini à la question **3**.

5.c. Retrouver le polynôme de la question **4** en utilisant cette formule.

Troisième partie : polynômes de Hermite

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = XH_n - H_n'$.

6. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n.

7. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.

Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

la fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On admettra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

8. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

8.a. Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P \mid Q \rangle$.

8.b. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

9. Une famille orthogonale

Dans la suite, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|.\|$.

9.a. Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle P \mid H_n \rangle = \langle P^{(n)} \mid H_0 \rangle$.

9.b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

9.c. Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9.d. Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i $(0 \leqslant i \leqslant 3)$ tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i H_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants, c'est-à-dire la borne inférieure de $\|P - Q\|$ quand Q décrit $\mathbb{R}_0[X]$.

10. Étude des racines des polynômes H_n

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note p le nombre de racines réelles (distinctes) d'ordre impair du polynôme H_n, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ses racines et S le polynôme défini par

$$S = 1 \text{ si } p = 0 \quad \text{et} \quad S = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i) \text{ sinon.}$$

10.a. Démontrer que, si $p < n$, alors $\langle S \mid H_n \rangle = 0$.

10.b. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x)H_n(x) \geqslant 0$.

10.c. En déduire que H_n a n racines réelles distinctes.