

# Corrigé du DS05 du 22/11/2025 (4h)

## Sujet A (MPI\*)

### Exercice 1 : Espaces à noyau reproduisant

#### Partie I : Propriétés des espaces à noyau reproduisant

1. Soit  $x \in I$ . L'application  $V_x : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(x) \end{cases}$  est clairement linéaire (c'est une évaluation), et continue car

$$\forall f \in E, \quad |V_x(f)| = |f(x)| = |\langle k_x, f \rangle| \leq \|k_x\| \times \|f\|$$

(d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Ceci montre également que  $\|V_x\| = \sup_{f \neq 0_E} \frac{|V_x(f)|}{\|f\|} \leq \|k_x\|$ .

Montrons qu'en fait  $\|V_x\| = \|k_x\|$ .

- Si  $k_x = 0_E$ , alors  $V_x(f) = \langle k_x, f \rangle = 0$  pour tout  $f \in E$ , donc  $\|V_x\| = 0 = \|k_x\|$ .
- Si  $k_x \neq 0_E$ , alors la norme d'opérateur  $\|V_x\|$  est atteinte en le vecteur non nul  $k_x$  puisque  $|V_x(k_x)| = |\langle k_x, k_x \rangle| = \|k_x\|^2$ .

Dans tous les cas,  $\|V_x\| = \|k_x\|$ .

2. Soit  $f \in E$  et  $(x, x_0) \in [0, 1]^2$ . On a

$$|f(x) - f(x_0)| = |\langle k_x, f \rangle - \langle k_{x_0}, f \rangle| = |\langle k_x - k_{x_0}, f \rangle| \leq \|k_x - k_{x_0}\| \times \|f\|.$$

Or, par les formules de développement des normes préhilbertiennes et par définition du noyau reproduisant  $K$  :

$$\|k_x - k_{x_0}\|^2 = \langle k_x, k_x \rangle - 2\langle k_x, k_{x_0} \rangle + \langle k_{x_0}, k_{x_0} \rangle = k_x(x) - 2k_{x_0}(x) + k_{x_0}(x_0) = K(x, x) - 2K(x_0, x) + K(x_0, x_0).$$

Si on suppose  $K : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  continue (par rapport à une quelconque norme sur  $\mathbb{R}^2$  puisque celui-ci est de dimension finie), alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (K(x, x) - 2K(x_0, x) + K(x_0, x_0)) = K(x_0, x_0) - 2K(x_0, x_0) + K(x_0, x_0) = 0,$$

donc  $\|k_x - k_{x_0}\| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ , et par majoration,  $|f(x) - f(x_0)| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$ , ce qui montre que  $f$  est continue en  $x_0$ . On a donc montré que toute fonction  $f$  de  $E$  est continue en tout point  $x_0$  de  $[0, 1]$ , c'est-à-dire  $E \subset \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ .

#### Partie II : Un contre-exemple

3. La forme linéaire  $V_1 : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(1) \end{cases}$  n'est pas continue pour la norme  $\|\cdot\|$  associée au produit scalaire  $(f, g) \mapsto \int_0^1 fg$  : en effet, la suite de fonctions  $(f_n : t \mapsto t^n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie  $f_n \in E$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\|f_n\| = \left( \int_0^1 f_n^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

alors que  $V_1(f_n) = f_n(1) = 1$  ne tend pas vers  $V_1(0_E) = 0$ .

D'après la question 1.,  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ne peut donc pas être un espace à noyau reproduisant.

**Partie III : Etude d'un exemple**

4. Si  $\sum a_n^2$  converge, alors  $a_n^2 \rightarrow 0$ , donc  $a_n \rightarrow 0$ , ce qui implique en particulier que  $(a_n)$  est bornée. Ainsi, il existe  $M > 0$  telle que pour tout  $t \in ]-1, 1[$ , on a  $|a_n t^n| \leq M t^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Vu que la série géométrique  $\sum t^n$  converge, on obtient par comparaison de SATP que  $\sum |a_n t^n|$  converge, et donc que  $\sum a_n t^n$  converge.

Ainsi,  $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$  est bien définie de  $] - 1, 1[$  dans  $\mathbb{R}$ .

5. Montrons que  $E = \left\{ f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n, (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n \geq 0} a_n^2 < +\infty \right\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(] - 1, 1[, \mathbb{R})$ .

- Déjà, l'ensemble  $E$  contient la fonction nulle car  $0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$  pour tout  $t \in ] - 1, 1[$  en posant  $a_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  (cette suite nulle est bien de carré sommable).
- Ensuite,  $E$  est stable par combinaison linéaire car si  $f, g$  sont dans  $E$ , de coefficients respectifs  $(a_n), (b_n)$  et si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors pour tout  $t \in ] - 1, 1[$  :

$$(\lambda f + g)(t) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) t^n$$

(les deux séries de gauche convergent donc la troisième aussi), et la suite  $(\lambda a_n + b_n)$  est bien de carré sommable car

$$(\lambda a_n + b_n)^2 = \lambda^2 a_n^2 + 2\lambda a_n b_n + b_n^2 \leq \lambda^2 a_n^2 + \lambda(a_n^2 + b_n^2) + b_n^2 = (\lambda^2 + \lambda)a_n^2 + (1 + \lambda)b_n^2,$$

$$\text{donc } \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n)^2 \leq (\lambda^2 + \lambda) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 + (1 + \lambda) \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 < +\infty.$$

Ainsi,  $E$  est un SEV de  $\mathcal{F}(] - 1, 1[, \mathbb{R})$ , donc un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

6. • Déjà, l'application  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$  est bien définie sur  $E \times E$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  car si  $\sum a_n^2 < +\infty$  et  $\sum b_n^2 < +\infty$ , alors (comme dans la question précédente)
- $$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n b_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 < +\infty, \text{ donc la série } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \text{ converge.}$$
- Ensuite,  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$  est clairement une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  (par linéarité de la somme infinie et bilinéarité du produit réel).
  - Enfin, pour tout  $f \in E : \langle f, f \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$  est une SATP convergente, donc cette quantité est positive, et nulle si et seulement si  $a_n^2 = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire ssi  $f = 0_E$ . On a donc le caractère défini-positif.

Ceci montre que  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ , donc  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace préhilbertien réel.

7. Fixons  $x \in ] - 1, 1[$ . On cherche  $g_x : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$  telle que pour tout  $f \in E$ ,  $f(x) = \langle g_x, f \rangle$ .

Cette condition équivaut à : pour toute suite  $(a_n)$  de carré sommable,  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n a_n$ . La suite  $(c_n) = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  convient car elle est de carré sommable (vu que la série géométrique  $\sum x^{2n}$  converge). Ainsi, la fonction  $g_x : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n t^n = \frac{1}{1 - xt}$  convient.

8. D'après la question précédente, l'espace préhilbertien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est à noyau reproduisant sur  $I = ] - 1, 1[$ , de noyau reproduisant  $K : \begin{cases} ] - 1, 1[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto K(x, t) = g_x(t) = \frac{1}{1 - xt} \end{cases}$ .

**Partie IV : Construction d'un espace à noyau reproduisant**

9. L'intervalle  $[0, 1]$  est compact dans  $\mathbb{R}$ , donc le produit cartésien  $A = [0, 1]^2$  est compact dans  $\mathbb{R}^2$  (muni de n'importe quelle norme, puisque cet EV est de dimension finie). Par le théorème de Heine, la fonction continue  $A : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est automatiquement uniformément continue.
10. Munissons  $\mathbb{R}^2$  de la norme infinie et fixons  $f \in E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour tout  $(x, x_0) \in [0, 1]^2$  :

$$|T(f)(x) - T(f)(x_0)| = \left| \int_0^1 (A(x, t) - A(x_0, t))f(t)dt \right| \leq \int_0^1 |A(x, t) - A(x_0, t)| \times |f(t)|dt.$$

Puisque  $f$  est continue sur le compact  $[0, 1]$ , elle est bornée, donc il existe  $M > 0$  tel que  $\forall t \in [0, 1], |f(t)| \leq M$ . Ainsi,

$$|T(f)(x) - T(f)(x_0)| \leq M \int_0^1 |A(x, t) - A(x_0, t)|dt.$$

Utilisons maintenant la continuité uniforme de  $A$  : on fixe  $\varepsilon > 0$ , il existe alors  $\delta > 0$  tel que

$$\forall ((a, b), (u, v)) \in [0, 1]^2 \times [0, 1]^2, \quad \|(a, b) - (u, v)\|_\infty \leq \delta \implies |A(a, b) - A(u, v)| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

Dès lors,

$$|x - x_0| \leq \delta \implies \forall t \in [0, 1], \|(x, t) - (x_0, t)\|_\infty = |x - x_0| \leq \delta \implies |A(x, t) - A(x_0, t)| \leq \frac{\varepsilon}{M},$$

donc

$$|x - x_0| \leq \delta \implies |T(f)(x) - T(f)(x_0)| \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

ce qui montre que la fonction  $T(f)$  est continue en tout point  $x_0 \in [0, 1]$ , donc  $T(f)$  est bien continue.

**Remarque**

*Vu que le rayon " $\delta$ " ne dépend pas du point  $x_0$ , on a en fait montré que  $T(f)$  est uniformément continue sur  $[0, 1]$ . Mais c'est normal (théorème de Heine...)*

11. La question précédente montre que pour tout  $f \in E, T(f) \in E$ . De plus,  $T$  est facilement linéaire par distributivité du produit réel et linéarité de l'intégrale. Donc  $T \in \mathcal{L}(E)$ .
12. Vu que  $\text{Ker}(T)$  est par hypothèse un SEV de dimension finie de l'espace préhilbertien  $E$ , son orthogonal en est un supplémentaire dans  $E$ , c'est-à-dire  $E = \text{Ker}(T) \oplus \text{Ker}(T)^\perp$ . Considérons alors la restriction

$$\tilde{T} : \begin{cases} \text{Ker}(T)^\perp & \longrightarrow & \text{Im}(T) \\ f & \longmapsto & T(f) \end{cases}.$$

Cette application est bien définie car  $\tilde{T}(\text{Ker}(T)^\perp) \subset T(E) = \text{Im}(T)$ , et elle est linéaire par restriction d'une application linéaire à un SEV.

De plus, elle est injective car  $\text{Ker}(\tilde{T}) = \text{Ker}(T) \cap \text{Ker}(T)^\perp = \{0_E\}$ , et surjective car

$$\text{Im}(T) = T(E) = T(\text{Ker}(T) + \text{Ker}(T)^\perp) = \underbrace{T(\text{Ker}(T))}_{=\{0_E\}} + T(\text{Ker}(T)^\perp) = \tilde{T}(\text{Ker}(T)^\perp) = \text{Im}(\tilde{T}).$$

Ainsi,  $\tilde{T}$  est un isomorphisme de  $\text{Ker}(T)^\perp$  sur  $\text{Im}(T)$ .

**Remarque**

*Il s'agit ici d'une version en dimension infinie du "théorème d'isomorphisme" (dont le théorème du rang se déduit).*

13. Notons  $S = \tilde{T}^{-1} : \text{Im}(T) \rightarrow \text{Ker}(T)^\perp$  et

$$\varphi : \begin{cases} \text{Im}(T) \times \text{Im}(T) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \varphi(f, g) = \langle S(f), S(g) \rangle = \int_0^1 S(f)S(g) \end{cases}.$$

L'application  $\varphi$  est clairement une forme bilinéaire symétrique sur  $Im(T)^2$ , par distributivité du produit de fonctions, linéarité de  $S$  (la réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme) et linéarité de l'intégrale. De plus, pour tout  $f \in Im(T)$  :

$$\varphi(f, f) = \langle S(f), S(f) \rangle$$

donc cette quantité est positive, et nulle si et seulement si  $S(f) = 0_E$  (puisque  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ ). Mais  $S$  étant linéaire injective,  $S(f) = 0_E$  équivaut à  $f = 0_E$ . Ainsi, la forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  est définie positive, c'est donc un produit scalaire sur  $Im(T)$ .

14. Soit  $K : \begin{cases} [0, 1]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & K(x, y) = \int_0^1 A(x, t)A(y, t)dt \end{cases}$  .

Montrons que l'espace préhilbertien  $(Im(T), \varphi)$  (qui est bien un SEV de  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ , donc de  $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ ) est un espace à noyau reproduisant (sur l'intervalle  $[0, 1]$ ) en montrant que  $K$  est explicitement un noyau reproduisant. Pour cela, on fixe  $x \in [0, 1]$  et on vérifie que la fonction

$$k_x : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & K(x, y) \end{cases}$$
 est bien dans  $Im(T)$  et "reproduit bien l'évaluation en  $x$ ", c'est-à-dire qu'elle représente la forme linéaire  $V_x : \begin{cases} Im(T) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(x) \end{cases}$  avec le prod. scal.  $\varphi$ .

- *Appartenance de  $k_x$  à  $Im(T)$  :*

On a par définition  $k_x : y \mapsto \int_0^1 h_x(t)A(y, t)dt$  en posant  $h_x : t \mapsto A(x, t)$ .

La fonction  $h_x$  est continue sur  $[0, 1]$ , car c'est une application partielle de  $A$  qui est elle-même continue en tant que fonction de deux variables réelles, donc  $h_x \in E$ .

Ainsi, on remarque que  $k_x : y \mapsto T(h_x)(y)$  donc  $k_x = T(h_x) \in Im(T)$ .

- *Représentation de  $V_x$  :*

Pour toute fonction  $f \in Im(T)$ , il existe une unique fonction  $g \in Ker(T)^\perp$  (**attention, l'orthogonalité s'entend ici au sens de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , pas de  $\varphi$ !**) telle que  $f = T(g) = \tilde{T}(g)$  (par l'isomorphisme  $\tilde{T}$  des questions précédentes). Ainsi :

$$\varphi(k_x, f) = \langle S(k_x), S(f) \rangle = \langle S(k_x), (S \circ \tilde{T})(g) \rangle = \langle (S \circ T)(h_x), g \rangle.$$

puisque  $S \circ \tilde{T} = Id_{Ker(T)^\perp}$ .

Reste à simplifier  $(S \circ T)(h_x)$ . **Attention, il faut vérifier que  $h_x : t \mapsto A(x, t)$  est dans  $Ker(T)^\perp$  pour pouvoir dire que  $(S \circ T)(h_x) = h_x$ .** Faisons-le :

$$\forall q \in Ker(T), \quad \langle h_x, q \rangle = \int_0^1 A(x, t)q(t)dt = T(q)(x) = 0$$

car  $T(q) = 0_E$  par hypothèse. On a donc bien  $(S \circ T)(h_x) = h_x$ , donc finalement

$$\varphi(k_x, f) = \langle h_x, g \rangle = \int_0^1 A(x, t)g(t)dt = T(g)(x) = f(x),$$

ce qui montre la représentation voulue.

\* \* \*

## Exercice 2 : Quelques parties denses dans $\mathbb{R}$

### Partie I : Intersection dénombrable d'ouverts denses

1. (a) Fixons  $x \in I$  (possible car  $I$  non vide).  $I$  étant ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $]x-r, x+r[ \subset I$ . Mais par densité de  $V_0$  dans  $\mathbb{R}$ , le voisinage  $]x-r, x+r[$  rencontre  $V_0$  : ainsi, il existe  $v \in V_0 \cap ]x-r, x+r[ \subset V_0 \cap I$ , donc  $I \cap V_0 \neq \emptyset$ .
- (b) On construit les deux suites proposées par récurrence forte :
  - $I \cap V_0$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  (en tant qu'intersection finie d'ouverts), non vide d'après la question précédente, donc il contient une boule fermée de rayon strictement positif, c'est-à-dire un intervalle  $[u_0, v_0]$  non réduit à un point. On a donc construit  $u_0 < v_0$  tels que  $[u_0, v_0] \subset I \cap V_0$ .
  - Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons construits  $u_0, \dots, u_n, v_0, \dots, v_n$  tels que
    - (i) pour tout  $0 \leq k \leq n$ , on a  $u_k < v_k$  ;
    - (ii)  $[u_0, v_0] \subset I \cap V_0$  ;
    - (iii) pour tout  $0 \leq k \leq n-1$ , on a  $[u_{k+1}, v_{k+1}] \subset ]u_k, v_k[ \cap V_{k+1}$ .
 Construisons alors  $u_{n+1}$  et  $v_{n+1}$  : l'intervalle ouvert  $]u_n, v_n[$  est non vide (puisque  $u_n < v_n$ ), et  $V_{n+1}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , donc  $]u_n, v_n[ \cap V_{n+1} \neq \emptyset$ . Ainsi,  $]u_n, v_n[ \cap V_{n+1}$  est un ouvert (par intersection finie d'ouverts) non vide de  $\mathbb{R}$ , donc il contient une boule fermée de rayon strictement positif, c'est-à-dire un intervalle  $[u_{n+1}, v_{n+1}]$  non réduit à un point. Ceci montre l'existence de  $u_{n+1} < v_{n+1}$  tels que  $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset ]u_n, v_n[ \cap V_{n+1}$ .
- (c) Par construction,  $(u_n)$  est croissante et majorée par  $v_0$ , alors que  $(v_n)$  est décroissante et minorée par  $u_0$ , donc  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent par le théorème de la limite monotone. En outre,  $u_n < v_n$  pour tout  $n$ , donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \lim_{+\infty} u \leq \lim_{+\infty} v \leq v_n.$$

Ainsi, l'intervalle non vide  $[\lim_{+\infty} u, \lim_{+\infty} v]$  est inclus dans tous les segments  $[u_n, v_n]$ , eux-mêmes inclus dans les  $V_n$  ainsi que dans  $I$  (puisque  $[u_0, v_0] \subset I$ ), donc  $[\lim_{+\infty} u, \lim_{+\infty} v] \subset B \cap I$ , ce qui montre que  $I \cap B$  n'est pas vide.

2. On a montré en 1. que tout intervalle ouvert non vide  $I$  rencontre  $B$ . A fortiori, toute boule ouverte de  $\mathbb{R}$  (intervalle du type  $]x-r, x+r[$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$ ) rencontre  $B$ , ce qui montre que  $B$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $V'_n = V_n \cap (\mathbb{R} \setminus \{x_n\})$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  (comme intersection finie d'ouverts). Puisque  $V_n$  est dense dans  $\mathbb{R}$ ,  $V'_n$  l'est aussi : en effet, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$ , la boule ouverte  $]x-r, x+r[$  contient un élément  $v \in V_n$ . Si  $v \neq x_n$ , alors  $v \in V'_n$ , mais si  $v = x_n$ , alors l'intervalle  $]x_n, x+r[$  (ouvert non vide) contient lui aussi un élément  $v' \in V_n$ , avec  $v' \neq x_n$  (puisque  $x_n < v'$ ) donc dans tous les cas,  $]x-r, x+r[$  contient un élément de  $V'_n$ . On applique alors ce qui précède : les  $V'_n$  sont des ouverts denses dans  $\mathbb{R}$ , donc

$$B' = B \setminus \{x_0, x_1, \dots\} = \{x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, x \in V_n \text{ et } x \neq x_n\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V'_n$$

est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Partie II : Compacité et propriété de Borel-Lebesgue**

4. S'il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $(x_{\varphi(n)})$  converge, alors par composition de limites, on a  $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Mais par hypothèse,  $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \geq \varepsilon$ , ce qui est contradictoire. Donc la suite  $(x_n)$  ne possède aucune suite extraite convergente.
5. Fixons un réel  $\varepsilon > 0$ . Supposons le contraire de ce que l'on veut montrer, c'est-à-dire :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_p) \in K^p, \quad K \not\subseteq \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon).$$

Fixons  $x_1 \in K$  (possible car  $K$  est non vide). Vu que  $K$  n'est pas inclus dans  $B(x_1, \varepsilon)$ , il existe  $x_2 \in K$  tel que  $\|x_2 - x_1\| \geq \varepsilon$ . Mais  $K$  n'est pas non plus inclus dans  $B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$ , donc il existe  $x_3 \in K$  tel que  $\|x_3 - x_1\| \geq \varepsilon$  et  $\|x_3 - x_2\| \geq \varepsilon$ . On en déduit par récurrence une suite  $(x_k)_{k \geq 1}$  à valeurs dans  $K$  telle que  $\forall i \neq j, \|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$  (à chaque étape, on utilise que  $K$  n'est pas inclus dans  $B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_k, \varepsilon)$  donc il existe  $x_{k+1} \in K$  tel que  $\|x_{k+1} - x_i\| \geq \varepsilon$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ ), et une telle suite n'a pas de sous-suite convergente d'après la question précédente, ce qui contredit la compacité de  $K$ . Ainsi :

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists (x_1, \dots, x_p) \in K^p, \quad K \subset \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon).$$

**Remarque**

Cette propriété s'appelle la précompacité (étant donné un rayon  $\varepsilon > 0$ , on peut recouvrir un compact  $K$  par une réunion finie de boules de rayon  $\varepsilon > 0$ ).

6. (a) Supposons la propriété fautive, à savoir :

$$\forall \alpha > 0, \exists x \in K, \forall i \in I, B(x, \alpha) \not\subseteq \Omega_i.$$

A fortiori, avec  $\alpha = 1/n$ , on obtient que pour tout entier  $n \geq 1$ , il existe  $x_n \in K$  tel que  $\forall i \in I, B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subseteq \Omega_i$ . Cela définit une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  à valeurs dans le compact  $K$ , qui possède donc une suite extraite  $(x_{\varphi(n)})$  qui converge vers  $x^* \in K$ .

En outre, par hypothèse,  $K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$  donc il existe  $i \in I$  tel que  $x^* \in \Omega_i$ . On peut alors aboutir à une contradiction par deux méthodes :

- $\Omega_i$  est ouvert, donc il existe  $r_i > 0$  tel que  $B(x^*, r_i) \subset \Omega_i$ . Mais  $x_{\varphi(n)} \rightarrow x^*$ , donc la boule  $B(x^*, r_i/2)$  contient les termes  $x_{\varphi(n)}$  à partir d'un certain rang  $n_0$ . On a alors  $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \subset B(x^*, r_i) \subset \Omega_i$  pour  $n$  assez grand, puisque

$$\|y - x_{\varphi(n)}\| < \frac{1}{\varphi(n)} \implies \|y - x^*\| \leq \|y - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - x^*\| < \frac{1}{\varphi(n)} + \frac{r_i}{2} < r_i.$$

Mais ceci est contradictoire avec la propriété  $\forall i \in I, B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subseteq \Omega_i$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \not\subseteq \Omega_i$ , donc il existe  $y_{n,i} \in E \setminus \Omega_i$  tel que  $\|y_{n,i} - x_{\varphi(n)}\| < \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$ . On a donc construit une suite  $(y_{n,i})_{n \in \mathbb{N}^*}$  qui converge vers  $x^*$  puisque  $y_{n,i} - x_{\varphi(n)} \rightarrow 0$  et  $x_{\varphi(n)} \rightarrow x^*$ . Cette suite est à valeurs dans le fermé  $E \setminus \Omega_i$ , donc sa limite également, ce qui donne  $x^* \in E \setminus \Omega_i$ , d'où une contradiction là encore.

Finalement, la propriété annoncée est vraie, c'est-à-dire qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall x \in K, \exists i \in I, B(x, \alpha) \subset \Omega_i.$$

- (b) Appliquons la question 5. avec  $\varepsilon = \alpha > 0$  : il existe donc  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_p$  dans  $K$  tels que  $K \subset \bigcup_{k=1}^p B(x_k, \alpha)$ . Par définition du réel  $\alpha$ , chaque boule  $B(x_k, \alpha)$  est incluse dans un ouvert de la famille  $(\Omega_i)_{i \in I}$ , noté  $\Omega_{i_k}$ . Donc finalement,  $K \subset \bigcup_{k=1}^p B(x_k, \alpha) \subset \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}$ .

7. Soit  $(x_n)$  une suite à valeurs dans  $X$ . Montrons par l'absurde que cette suite a une valeur d'adhérence dans  $X$ . Si ce n'est pas le cas, alors pour tout  $y \in X$ ,  $y$  n'est pas valeur d'adhérence, donc il existe  $r_y > 0$  tel que  $B(y, r_y)$  ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite  $(x_n)$  (si toute boule centrée en  $y$  contenait une infinité de  $x_n$ , alors on pourrait construire une suite extraite de limite  $y$ ). Or, on a  $X \subset \bigcup_{y \in K} B(y, r_y)$ , donc par la propriété supposée, il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $y_1, \dots, y_p$  dans  $X$  tels que  $X \subset \bigcup_{i=1}^p B(y_i, r_{y_i})$ . Puisque tous les  $x_n$  sont dans  $X$ , cela implique qu'il existe  $i_0 \in [1, p]$  tel que la boule  $B(y_{i_0}, r_{y_{i_0}})$  contient une infinité de termes de la suite  $(x_n)$ , ce qui contredit la propriété définissant les  $r_y$ .

### Partie III : Parties de $\mathbb{R}$ contenant de "gros" ensembles compacts

8. (a) Puisque  $C = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{c_m\} \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_m$  avec  $I_m = ]c_m - \alpha_m, c_m + \alpha_m[$ , on a un recouvrement de  $C$  par des ouverts de  $\mathbb{R}$ , donc par compacité de  $C$ , la propriété de Borel-Lebesgue s'applique, et on peut donc extraire de la famille  $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$  un sous-recouvrement fini de  $C$ , noté  $(I_{m_1}, \dots, I_{m_k})$  avec  $m_1 < \dots < m_k$  dans  $\mathbb{N}$ . En posant  $n = m_k$ , on a bien

$$C \subset I_{m_1} \cup \dots \cup I_{m_k} \subset \bigcup_{k=0}^n I_k.$$

- (b) Comme indiqué dans l'énoncé, considérons les fonctions  $u_k : x \mapsto \max(0, \alpha_k - |x - c_k|)$  pour  $0 \leq k \leq n$ . Ces fonctions sont continues sur  $\mathbb{R}$  (la valeur absolue est continue et le maximum de deux fonctions continues l'est aussi), positives et on a

$$\forall k \in [0, n], \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_k(x) = 0 \iff |x - c_k| \geq \alpha_k \iff x \notin I_k.$$

Ainsi, si on veut une fonction continue qui s'annule sur  $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=0}^n I_k = \bigcap_{k=0}^n (\mathbb{R} \setminus I_k)$ , il suffit

de considérer la fonction somme  $u = \sum_{k=0}^n u_k$ . On a  $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $u = 0$  seulement sur

$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{k=0}^n I_k$  (une somme de fonctions positives s'annule lorsque toutes les fonctions s'annulent en même temps). Sur le compact  $C$ , la fonction  $u$  atteint un minimum  $m \geq 0$  (d'après le théorème des bornes atteintes). Mais  $C \subset \bigcup_{k=0}^n I_k$  donc  $u > 0$  sur  $C$ , ce qui montre que  $m = \min_C(u) > 0$ .

Finalement, en posant  $g : x \mapsto \min\left(1, \frac{u(x)}{m}\right)$ , on a  $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  (le minimum de deux fonctions continues reste une fonction continue),  $g$  est nulle hors des  $(I_k)_{0 \leq k \leq n}$  (puisque  $u$  est nulle dans ce cas),  $g = 1$  sur  $C$  (puisque dans ce cas  $u(x) \geq m$ ), et  $0 \leq g \leq 1$ . Il ne reste plus qu'à restreindre  $g$  au segment  $[a, b]$  pour avoir ce que l'on veut.

- (c) Puisque  $g$  est nulle en dehors des intervalles  $I_k$ , on a  $\int_a^b g = \int_{(I_0 \cup \dots \cup I_n) \cap [a, b]} g$ .

La réunion des  $I_k$  n'étant pas nécessairement disjointe (on pourrait ceci dit la rendre disjointe en diminuant suffisamment les rayons  $\alpha_k$  des intervalles), on a par positivité de  $g$  :

$$\int_a^b g \leq \sum_{k=0}^n \int_{I_k} g \leq \sum_{k=0}^n \int_{I_k} 1 = \sum_{k=0}^n 2\alpha_k \leq \varepsilon,$$

vu les hypothèses sur les  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

9. (a) Fixons  $a < b$  réels. Supposons par l'absurde que  $A \cap [a, b]$  soit fini ou dénombrable. Alors par l'hypothèse (i),  $A \cap [a, b]$  contient un compact  $C$ , lui aussi fini ou dénombrable, et il existe  $\varepsilon > 0$  telle que la propriété (ii) est vraie.  
**Ce compact  $C$  est non vide** : en effet si  $C = \emptyset$ , la propriété (ii) supposée devient :

"pour toute  $g : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  continue, on a  $\int_a^b g \geq \varepsilon > 0$ ", elle est donc automatiquement fausse (prendre  $g$  nulle).

On peut donc écrire le compact  $C$  comme le support d'une suite :

$$C = \{c_n, n \in \mathbb{N}\},$$

avec les  $c_n$  réels non nécessairement distincts pour tenir compte du cas où  $C$  est fini.

Par la question 8., on peut alors construire une fonction  $g : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  continue telle que  $\int_a^b g \leq \varepsilon/2$ , ce qui contredit l'hypothèse (ii).

Ainsi,  $A \cap [a, b]$  n'est ni fini ni dénombrable.

- (b) Pour tous réels  $a < b$ ,  $[a, b] \cap A$  n'est ni fini ni dénombrable, donc contient strictement plus que ses extrémités  $a$  et  $b$ . Ainsi, tout intervalle ouvert  $]a, b[$  avec  $a > b$  contient des éléments de  $A$ , ce qui montre que  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
- (c) Soit  $D \subset A$  avec  $D$  dénombrable. Pour tous réels  $a < b$ , on a  $A \cap [a, b]$  ni fini ni dénombrable d'après 9.(a), donc  $A \cap [a, b] \not\subset D$ . Ainsi,  $[a, b]$  contient des éléments de  $A \setminus D$ , ce qui montre que  $A \setminus D$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

\* \* \*