

## DS05 du 22/11/2025 (4h) Sujet A (MPI\*)

Le sujet se compose de 2 exercices indépendants.  
Calculatrice interdite.

\* \* \*

### Exercice 1 : Espaces à noyau reproduisant

#### Définitions

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  d'intérieur non vide et soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien réel.

On dit que  $E$  est un *espace à noyau reproduisant sur  $I$*  lorsqu'il vérifie les deux propriétés suivantes :

- (i) l'espace  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  des fonctions définies sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ;
- (ii) pour tout  $x \in I$ , il existe une application  $k_x \in E$  vérifiant

$$\forall f \in E, \quad f(x) = \langle k_x, f \rangle.$$

On appelle alors *noyau reproduisant* l'application  $K : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall (x, t) \in I^2, \quad K(x, t) = k_x(t).$$

Dans la suite, chaque espace préhilbertien réel  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  étudié sera muni à chaque fois de la norme  $\|\cdot\|$  associée au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  :

$$\forall f \in E, \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

#### Partie I : Propriétés des espaces à noyau reproduisant

On suppose que  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace à noyau reproduisant sur l'intervalle  $I$ , de noyau reproduisant  $K : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in I$ , la forme linéaire  $V_x : \begin{cases} (E, \|\cdot\|) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto f(x) \end{cases}$  est continue et calculer sa norme d'opérateur  $\|V_x\|$  en fonction de  $\|k_x\|$ .
2. On suppose  $K$  continue sur  $I \times I$ . Montrer que  $E \subset C^0(I, \mathbb{R})$ .  
*On pourra majorer, pour  $f \in E$  et pour  $(x, x_0) \in I^2$ ,  $|f(x) - f(x_0)|$  en fonction de  $K$ .*

#### Partie II : Un contre-exemple

3. Dans cette question,  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  est muni du produit scalaire classique défini par

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 fg.$$

En étudiant la continuité de la forme linéaire  $V_1 : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto f(1) \end{cases}$ , montrer que  $E$  n'est pas un espace à noyau reproduisant.

#### Partie III : Etude d'un exemple

4. Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle telle que  $\sum a_n^2$  converge, montrer que la fonction  $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$  est bien définie sur l'intervalle  $] -1, 1[$ .

Dans la suite de cette partie, on considère l'ensemble  $E$  des fonctions de  $] - 1, 1[$  dans  $\mathbb{R}$  de la forme :

$$f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n,$$

où  $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $\sum a_n^2$  converge.

On admet que chaque  $f \in E$  est associée à une unique suite  $(a_n)$ , appelée la suite des coefficients de  $f$  (cela sera démontré dans le cours sur les séries entières).

5. Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Pour  $(f, g) \in E^2$ , on pose

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n,$$

où  $(a_n)$  est la suite des coefficients de  $f$  et  $(b_n)$  celle de  $g$ .

6. Montrer que  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace préhilbertien réel.

7. Soit  $x \in ] - 1, 1[$ . Déterminer  $g_x \in E$  tel que

$$\forall f \in E, \quad f(x) = \langle g_x, f \rangle.$$

8. En déduire que  $E$  est un espace à noyau reproduisant et préciser son noyau.

#### Partie IV : Construction d'un espace à noyau reproduisant

On considère de nouveau  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  muni du produit scalaire défini par :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 fg.$$

Nous avons montré précédemment que  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  n'est pas un espace à noyau reproduisant.

On va construire un SEV de  $E$  à noyau reproduisant.

On considère une fonction  $A : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On pose, pour tout  $f \in E$  et tout  $x \in [0, 1]$  :

$$T(f)(x) = \int_0^1 A(x, t) f(t) dt$$

9. Justifier que  $A$  est uniformément continue sur  $[0, 1]^2$ .

10. En déduire que  $T(f) : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & T(f)(x) \end{cases}$  est continue.

*On pourra munir  $[0, 1]^2$  de la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  et majorer  $|T(f)(x) - T(f)(x_0)|$  pour  $(x, x_0) \in [0, 1]^2$ .*

11. Montrer que  $T \in \mathcal{L}(E)$ .

On suppose que  $\text{Ker}(T)$  est de dimension finie.

12. Justifier que  $T$  induit un isomorphisme de  $(\text{Ker}(T))^{\perp}$  sur  $\text{Im}(T)$ .

On note désormais  $S$  la bijection réciproque de cet isomorphisme.

13. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \text{Im}(T) \times \text{Im}(T) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \varphi(f, g) = \langle S(f), S(g) \rangle \end{cases}$$

est un produit scalaire sur  $\text{Im}(T)$ .

On considère l'application  $K$  définie sur  $[0, 1]^2$  par

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad K(x, y) = \int_0^1 A(x, t) A(y, t) dt.$$

14. Montrer que  $(\text{Im}(T), \varphi)$  est un espace à noyau reproduisant, de noyau  $K$ .

\* \* \*

## Exercice 2 : Quelques parties denses dans $\mathbb{R}$

$(E, \|\cdot\|)$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé, avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Pour tout  $x \in E$  et pour tout réel  $r > 0$ , on note  $B(x, r)$  la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$ .

### Partie I : Intersection dénombrable d'ouverts denses

Dans cette première partie,  $E = \mathbb{R}$  et  $\|\cdot\| = |\cdot|$  (la valeur absolue).

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère un sous-ensemble ouvert  $V_n$ , dense dans  $\mathbb{R}$ . On pose  $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ .

1. Soit  $I$  un intervalle ouvert, non vide, de  $\mathbb{R}$ .
  - (a) Justifier que  $I \cap V_0 \neq \emptyset$ .
  - (b) Démontrer qu'il existe des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels telles que :
    - (i) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n < v_n$  ;
    - (ii)  $[u_0, v_0] \subset I \cap V_0$  ;
    - (iii) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset ]u_n, v_n[ \cap V_{n+1}$ .
  - (c) Démontrer que l'ensemble  $I \cap B$  n'est pas vide.
2. Démontrer que l'ensemble  $B$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .
3. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $B$ . En considérant les ensembles  $V'_n = V_n \setminus \{x_n\}$ , démontrer que l'ensemble  $B' = B \setminus \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

### Partie II : Compacité et propriété de Borel-Lebesgue

Dans cette seconde partie, on revient au cas général  $(E, \|\cdot\|)$ .

Soit  $K$  un sous-ensemble compact non vide de  $E$ .

4. Montrer qu'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  telle que

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad n \neq p \implies \|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$$

n'admet aucune suite extraite convergente.

5. Montrer que pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $p > 0$  et  $x_1, \dots, x_p$  éléments de  $K$  tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon). \text{ On pourra raisonner par l'absurde.}$$

On considère une famille  $(\Omega_i)_{i \in I}$  de sous-ensembles ouverts de  $E$ ,  $I$  étant un ensemble quelconque, telle que  $K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ .

6. (a) Montrer qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in K$ , il existe  $i \in I$  tel que  $B(x, \alpha)$  soit contenue dans l'ouvert  $\Omega_i$ .  
On pourra raisonner par l'absurde en construisant une suite d'éléments de  $K$  qui mène à une contradiction.
- (b) En déduire qu'il existe une sous-famille finie  $(\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p})$  de la famille  $(\Omega_i)_{i \in I}$  telle que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}.$$

On a donc montré que tout compact  $K$  vérifie la propriété suivante, appelée **propriété de Borel-Lebesgue** : de tout recouvrement de  $K$  par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.

7. Réciproquement, montrer (encore par l'absurde) que tout ensemble  $X \subset E$  qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue est compact.

Ainsi, dans un EVN  $E$ , la compacité d'une partie est équivalente à la propriété de Borel-Lebesgue.

**Partie III : Parties de  $\mathbb{R}$  contenant de "gros" ensembles compacts**

Dans cette troisième et dernière partie, on se place de nouveau dans  $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ .

8. Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ , et soit  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de l'intervalle  $[a, b]$ . On suppose que l'ensemble  $C = \{c_n, n \in \mathbb{N}\}$  est compact.

Soit un nombre réel  $\varepsilon > 0$  et soit  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels strictement positifs telle

$$\text{que } 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \leq \varepsilon.$$

- (a) Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , posons  $I_k = ]c_k - \alpha_k, c_k + \alpha_k[$ .

En utilisant la propriété de Borel-Lebesgue (montrée en 6(b).), démontrer qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{tel que } C \subset \bigcup_{k=0}^n I_k.$$

- (b) Démontrer qu'il existe une fonction continue  $g : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  telle que l'on ait

$$g(x) = 1 \text{ pour tout } x \in C;$$

$$g(x) = 0 \text{ pour tout } x \notin \bigcup_{k=0}^n I_k.$$

On pourra s'aider des fonctions  $u_k : x \mapsto \max(0, \alpha_k - |x - c_k|)$  pour tout  $k \in [0, n]$ .

- (c) Démontrer l'inégalité  $\int_a^b g \leq \varepsilon$ .

9. Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ . On suppose que pour tous réels  $a < b$ , il existe une partie compacte  $C$  de  $\mathbb{R}$  et un nombre réel  $\varepsilon > 0$  tels que

(i)  $C \subset A \cap [a, b]$ ;

- (ii) pour toute fonction continue  $g : [a, b] \rightarrow [0, 1]$  telle que  $g(x) = 1$  pour tout  $x \in C$ , on a

$$\int_a^b g \geq \varepsilon.$$

- (a) Démontrer que pour tous réels  $a < b$ , l'ensemble  $A \cap [a, b]$  n'est ni fini ni dénombrable.

- (b) En déduire que  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

- (c) Montrer enfin que pour toute partie dénombrable  $D \subset A$ , l'ensemble  $A \setminus D$  est encore dense dans  $\mathbb{R}$ .