2021 - CONCOURS CCINP - MP - MATHÉMATIQUES 2
UN CORRIGÉ

EXERCICE

Q1. $M_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique :

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2, \quad <A|B>= \mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}.$$

On note $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ les matrices de la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.
$D_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices diagonales. $(E_{i,i})_{1\leq i\leq n}$ est une base de $D_n(\mathbb{R})$ et est de cardinal n donc $D_n(\mathbb{R})$ est de dimension n.
Alors $D_n(\mathbb{R})^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$, donc

$$\dim(D_n(\mathbb{R})^\perp) = \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(D_n(\mathbb{R})) = n^2 - n.$$

Posons $F = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \forall i \in [|1,n|], a_{i,i} = 0\} = \mathrm{vect}(\{E_{i,j}, (i,j) \in [|1,n|]^2, i \neq j\})$.
$(E_{i,i})_{(i,j)\in[|1,n|]^2, i\neq j}$ est une base de F et est de cardinal n^2-n donc F est de dimension n^2-n.

$$\forall A \in F, \quad \forall B \in D_n(\mathbb{R}), \quad <A|B>= \sum_{(i,j)\in[|1,n|]^2} a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{i=1}^n \underbrace{a_{i,i}}_{=0} b_{i,i} + \sum_{i\neq j} a_{i,j} \underbrace{b_{i,j}}_{=0} = 0.$$

Donc $F \subset D_n(\mathbb{R})^\perp$. De plus ces deux sous-espaces vectoriels sont de même dimension n^2-n, donc sont égaux.
Finalement $\boxed{D_n(\mathbb{R})^\perp = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \forall i \in [|1,n|], a_{i,i} = 0\} = \mathrm{vect}(\{E_{i,j}, (i,j) \in [|1,n|]^2, i \neq j\}).}$

PROBLEME - Théorème de décomposition de Dunford

Partie I - Quelques exemples

Q2. Soit $A \in M_n(K)$.

- $\boxed{\text{Si } A \text{ est diagonalisable, } (D,N) = (A,0)}$ est la décomposition de Dunford de A .
  En effet, $D = A$ est diagonalisable, $N = 0$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = A + 0 = D + N$.
- $\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, } (D,N) = (0,A)}$ est la décomposition de Dunford de A .
  En effet, $D = 0$ est diagonalisable, $N = A$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = 0 + A = D + N$.
- Soit A une matrice trigonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ inversible et $T \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, telles que $P^{-1}AP = T$. Les matrices A et T sont semblables donc ont même polynôme caractéristique : $\chi_A = \chi_T$.
  Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ les coefficients diagonaux de la matrice T.
  Puisque T est triangulaire, $\chi_T(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Donc $\chi_A = \chi_T$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
  $\boxed{\text{Une matrice trigonalisable dans } M_n(\mathbb{K}) \text{ vérifie l'hypothèse du théorème}}$ donc admet une décomposition de Dunford.
- Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  D' est diagonalisable (car diagonale), N' est nilpotente (car $(N')^2 = 0$), $A = D' + N'$, cependant D' et N' ne commutent pas :

  $$D'N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq N'D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  $\boxed{\text{Non, } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ n'est pas la décomposition de Dunford de } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$ car ces deux matrices ne commutent pas. De plus, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ possède deux valeurs propres distinctes 1 et 2, donc est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$, donc $(D,N) = (A,0)$ est la décomposition de Dunford de A.

Q3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Supposons par l'absurde que A admet une décomposition de Dunford (D, N). D'après le théorème, on a de plus $\chi_A = \chi_D$.

Puisque D est diagonalisable, D est semblable à une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Son polynôme caractéristique vaut $\chi_A(X) = \chi_D(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$. Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde.

$\boxed{\text{La matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ n'admet pas de décomposition de Dunford dans } M_2(\mathbb{R}).}$

Q4. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculons son polynôme caractéristique, en développant par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -8 \\ -3 & X+1 & -6 \\ 2 & 0 & X+5 \end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix} X-3 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} \\ &= (X+1)(X^2+2X+1) = (X+1)^3. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X-1)^3.}$

χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de l'énoncé, A admet une décomposition de Dunford. Soit (D, N) le couple de sa décomposition de Dunford.

D est diagonalisable et $\chi_D(X) = \chi_A(X) = (X+1)^3$ donc $\mathrm{Sp}(D) = \{-1\}$. D est semblable à la matrice diagonale avec des -1 sur sa diagonale, donc D est semblable à $-I_3$.

Ainsi $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$, $P^{-1}DP = -I_3$, d'où $D = P(-I_3)P^{-1} = -I_3$. On a $\boxed{D = -I_3}$, d'où

$$N = A - D = A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que (D, N) est la décomposition de Dunford de A (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) :

- (1) $A = D + N$.
- (2) $D = -I_3$ est diagonale donc diagonalisable.
- (3) Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0 = (A + I_3)^3 = N^3$ donc N est bien nilpotente. De plus :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 0.$$

  Donc N est nilpotente d'indice 2.
- (4) $D = -I_3$ est scalaire donc commute avec N : $DN = ND = -N$.

Ainsi $\boxed{\left(D = -I_3, N = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}}.$

Q5. On a montré que $A = D + N$ où (D, N) est la décomposition de Dunford de A.

- Puisque D et N commutent, $\exp(A) = \exp(D + N) = \exp(D)\exp(N)$.
- $D = -I_3$ donc $\forall k \in \mathbb{N},\ D^k = (-1)^k I_3$. On reconnaît le développement en série entière de exp en -1 :

$$\exp(D) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} D^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right) I_3 = e^{-1} I_3.$$

- Puisque N est nilpotente d'indice 2, on a $\forall k \geq 2, N^k = 0$ et $\exp(N)$ est une somme finie :

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} N^k = I_n + N = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- On conclut que

$$\boxed{\exp(A) = \exp(D)\exp(N) = e^{-1}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.}$$

Q6. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.
Posons $P(X) = X(X-1)$. $P(A^2) = A^2(A^2 - I_n) = A^2(A - I_n)(A + I_n) = 0(A + I_n) = 0$.
Donc $\boxed{\text{le polynôme } X(X-1) \text{ annule la matrice } A^2.}$

Le polynôme $X(X-1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ et annule A^2, donc $\boxed{A^2 \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{K}).}$
Posons $D = A^2$ et $N = A - A^2$. Vérifions que (D, N) est la décomposition de Dunford de A :

- (1) $A = D + N$ par construction.
- (2) $D = A^2$ est diagonalisable.
- (3) $N^2 = (A - A^2)^2 = A^2(I_n - A)^2 = A^2(A - I_n)(A - I_n) = 0$ car $A^2(A - I_n) = 0$.
  $N^2 = 0$ donc N est nilpotente.
- (4) D et N sont des polynômes en A donc commutent : $DN = ND = A^3 - A^4$.

Donc $\boxed{(D = A^2, N = A - A^2) \text{ est la décomposition de Dunford de la matrice } A.}$

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Q7. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculons son polynôme caractéristique. On effectue $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$.

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) &= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} &&= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & -1 \\ -1 & X-1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)\begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} &&= (X-1)\Big((X-3)(X-1)+1\Big) \\ &= (X-1)(X^2 - 4X + 4) &&= (X-1)(X-2)^2. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2.}$ Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$. On a $\dim(\ker(A - I_3)) = 1$. Calculons $\dim(\ker(A - 2I_3))$.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(A - 3I_3)$ est de rang 2. Par le théorème du rang, $\dim(\ker(A - 3I_3)) = 1 < 2$.
La dimension du sous-espace propre associé à 2 est strictement inférieure à la multiplicité de 2 en tant que valeur propre dans χ_A, donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } M_3(\mathbb{R}).}$
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Par le théorème de Cayley-Hamilton, χ_u annule u, or $\chi_u(X) = (X-1)(X-2)^2$. Les polynômes $(X-1)$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux.
Par le lemme de décomposition des noyaux, $\boxed{\mathbb{R}^3 = \ker(\chi_u(u)) = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2.}$

Q8. Calculons les noyaux des endomorphismes demandés.

$$\begin{aligned} A - I_3 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. & \ker(A - I_3) &= \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\ A - 2I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. & \ker(A - 2I_3) &= \mathrm{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ (A - 2I_3)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. & \ker(A - 2I_3)^2 &= \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Posons alors

$$\boxed{e_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}.}$$

P est la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique. Or $\det(P) = -1 \neq 0$ donc la famille(e_1, e_2, e_3) est libre et de cardinal $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. $P \in GL_3(\mathbb{R})$ est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (e_1, e_2, e_3).

De plus $\boxed{\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{vect}(e_1),\ \ker(u - 2\mathrm{id}) = \mathrm{vect}(e_2),\ \ker(u - 2\mathrm{id})^2 = \mathrm{vect}(e_2, e_3).}$

Par construction, on a $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = 2e_2$. De plus

$$u(e_3) = Ae_3 = A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = e_2 + 2e_3.$$

Ecrivons la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{B = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}.}$$

Q9. • Puisque A et B représentent la matrice du même endomorphisme u dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}$, on a la formule de changement de base $P^{-1}AP = B$ i.e. $A = PBP^{-1}$. De plus on obtient l'inverse de P en remarquant que :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -e_1 + e_2 + e_3, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = e_1 - e_3, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = e_3. \quad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}.}$$

• Montrons que :

$$\boxed{\left(D_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}.}$$

En effet : $B = D_1 + N_1$; D_1 est diagonale donc diagonalisable ; $N_1^2 = 0$ donc N_1 est nilpotente ; D_1 et N_1 commutent car $D_1N_1 = N_1D_1 = 2N_1$.

• On pose $\boxed{D = PD_1P^{-1} \text{ et } N = PN_1P^{-1}.}$ Alors (D, N) est la décomposition de Dunford de A :

⋆ (1) $A = PBP^{-1} = P(D_1 + N_1)P^{-1} = PD_1P^{-1} + PN_1P^{-1} = D + N$.

⋆ (2) $D = PD_1P^{-1}$ est semblable à la matrice diagonale D_1 donc D est diagonalisable.

⋆ (3) $N^2 = (PN_1P^{-1})^2 = PN_1^2P^{-1} = 0$ donc N est nilpotente.

⋆ (4) D et N commutent car D_1 et N_1 commutent :

$$DN = (PD_1P^{-1})(PN_1P^{-1}) = P(D_1N_1)P^{-1} = P(N_1D_1)P^{-1} = (PN_1P^{-1})(PD_1P^{-1}) = ND.$$

Donc (D, N) est la décomposition de Dunford de A. Calculons ces matrices :

$$D = PD_1P^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}.$$

Puis :

$$N = PN_1P^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Finalement $\boxed{\left(D = \begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.}$

Q10. On décompose la fraction en éléments simples. Il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}=\frac{a}{X-1}+\frac{bX+c}{(X-2)^2}=\frac{(a+b)X^2+(c-b-4a)X+4a-c}{(X-1)(X-2)^2}.$$

Par identification des coefficients,

$$\begin{cases} a+b &= 0. \\ c-b-4a &= 0. \\ 4a-c &= 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1. \\ b &= -1. \\ c &= 3. \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}=\frac{1}{X-1}+\frac{-X+3}{(X-2)^2}.}$$

On en déduit par multiplication par $(X-1)(X-2)^2$: $\quad 1=(X-2)^2+(-X+3)(X-1)$.

Posons $\boxed{U(X)=-X+3,\quad V(X)=1.}$ On a $\deg(U)=1<2$, $\deg(V)=0<1$ et $\boxed{(X-1)U(X)+(X-2)^2V(X)=1.}$

Q11. • On pose $p=V(u)\circ(u-2\mathrm{id})^2$ et $q=U(u)\circ(u-\mathrm{id})$.
On a obtenu à la question **Q10** la relation $U(X)(X-1)+V(X)(X-2)^2=1$. On évalue cette égalité en l'endomorphisme u :

$$p+q=U(u)\circ(u-\mathrm{id})+V(u)\circ(u-2\mathrm{id})^2=1(u)=\mathrm{id}.$$

Donc $\boxed{p+q=\mathrm{id}.}$

• Posons $F=\ker(u-\mathrm{id})$ et $G=\ker(u-2\mathrm{id})^2$.
Soit $x\in F$. Alors $(u-\mathrm{id})(x)=0$, donc :

$$\begin{aligned} q(x) &= U(u)\circ(u-\mathrm{id})(x)=0. \\ p(x) &= p(x)+q(x)=\mathrm{id}(x)=x. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall x\in F,\ p(x)=x,\ q(x)=0.}$
Soit $x\in G$. Alors $(u-\mathrm{id})^2(x)=0$, donc :

$$\begin{aligned} p(x) &= V(u)\circ(u-2\mathrm{id})^2(x)=0. \\ q(x) &= p(x)+q(x)=\mathrm{id}(x)=x. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall x\in G,\ p(x)=0,\ q(x)=x.}$
Puisque $E=F\oplus G$, tout $x\in E$ s'écrit de manière unique $x=x_F+x_G$ avec $x_F\in F$ et $x_G\in G$. On obtient :

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x_F)+p(x_g) &= x_F+0=x_F. \\ q(x) &= q(x_F)+q(x_g) &= 0+x_G=x_G. \end{aligned}$$

On a montré que $\boxed{p \text{ est le projecteur sur } F=\ker(u-\mathrm{id}) \text{ parallèlement à } G=\ker(u-2\mathrm{id})^2}$

et $\boxed{q \text{ est le projecteur sur } G=\ker(u-2\mathrm{id})^2 \text{ parallèlement à } F=\ker(u-\mathrm{id}).}$

Q12. On pose $d=p+2q$.
Puisque $e_1\in\ker(u-\mathrm{id})$, on a $p(e_1)=e_1$ et $q(e_1)=0$. D'où $d(e_1)=p(e_1)+2q(e_1)=e_1$.
Puisque $e_2\in\ker(u-2\mathrm{id})^2$, on a $p(e_2)=0$ et $q(e_2)=e_2$. D'où $d(e_2)=p(e_2)+2q(e_2)=2e_2$.
De même, $e_2\in\ker(u-2\mathrm{id})^2$ donc $d(e_3)=2e_3$.
On obtient la matrice de d dans la base (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} d(e_1) &= e_1. \\ d(e_2) &= 2e_2. \\ d(e_3) &= 2e_3. \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(d)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.}$$

(On retrouve la matrice D_1 de la décomposition de Dunford de B.) Or

$$\begin{aligned} p &= V(u)\circ(u-2\mathrm{id})^2 &= (X-2)^2(u) &= (X^2-4X+4)(u) \\ q &= U(u)\circ(u-\mathrm{id}) &= ((-X+3)(X-1))(u) &= (-X^2+4X-3)(u). \\ d &= p+2q &= \Big((X^2-4X+4)+2(-X^2+4X-3)\Big)(u) &= (-X^2+4X-2)(u). \end{aligned}$$

Donc $d = (-X^2+4X-2)(u)$ et $D = (-X^2+4X-2)(A) = -A^2+4A-2I$. Enfin $N = A - D = A^2-3A+2I$.
Donc $\boxed{(D = -A^2+4A-2I, N = A^2-3A+2I) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.}$
Effectuons les calculs :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A &=& \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \\ A^2 &=& \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 7 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcccl} D &=& -A^2+4A-2I &=& \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \\ N &=& A^2-3A+2I &=& \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}\right.$$

On retrouve le même résultat qu'à la question **Q9**.

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q13. • Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ une valeur propre de u et $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$.
Puisque u et v commutent :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$

D'où $v(x) \in E_\lambda(u)$. On a montré que $\forall x \in E_\lambda(u), v(x) \in E_\lambda(u)$. Donc $E_\lambda(u)$ est stable par v.
$\boxed{\text{Tout sous-espace propre de } u \text{ est stable par } v.}$

• Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.
On note $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ les valeurs propres de u deux à deux distinctes.
Pour $i \in [|1,p|]$, $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v. Notons v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.
Puisque v est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé à racines simples qui annule v, alors P annule également v_i donc v_i est diagonalisable. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(u)$ formée de vecteurs propres de v_i, alors ce sont des vecteurs propres de v. De plus $\mathcal{B}_i$ est aussi formée de vecteurs propres de u car $\forall x \in E_{\lambda_i}(u), u(x) = \lambda_i x$.
Puisque u est diagonalisable, E se décompose en somme directe des sous-espaces propres de u :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u).$$

$\mathcal{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}(u)$ donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E, formée de vecteurs propres de u et de v.
$\boxed{\text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ commune de diagonalisation de } u \text{ et } v.}$

Q14. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
D'après la question **Q13**, il existe une base commune $\mathcal{B}$ de diagonalisation pour les endomorphismes associés. Donc il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$, qui est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}$, telle que $P^{-1}AP = D_1$ et $P^{-1}BP = D_2$ soient deux matrices diagonales.
Alors $P^{-1}(A-B)P = P^{-1}AP - P^{-1}BP = D_1 - D_2$ est diagonale, donc $A - B$ est diagonalisable.
$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont deux matrices diagonalisables de } M_n(\mathbb{K}) \text{ qui commutent, alors } A-B \text{ est diagonalisable.}}$

Q15. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
On suppose que A est nilpotente d'indice p et que B est nilpotente d'indice q. On a $A^p = 0$ et $B^q = 0$.
Puisque A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(A-B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k (-1)^{p+q-1-k} B^{p+q-1-k}.$$

Si $k \geq p$, alors $A^k = 0$.
Sinon, on a $k \leq p-1$, donc $p+q-1-k \geq q$, d'où $B^{p+q-1-k} = 0$.
On en déduit que tous les termes de la somme sont nuls, donc $\boxed{(A-B)^{p+q-1} = 0}$ et $A-B$ est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à $p+q-1$.
$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont deux matrices nilpotentes de } M_n(\mathbb{K}) \text{ qui commutent, alors } A-B \text{ est nilpotente.}}$

Q16. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ à la fois diagonalisable et nilpotente.
Puisque A est nilpotente, 0 est la seule valeur propre de A. Puisque A est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, A est semblable à la matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{C})$ comprenant des 0 sur la diagonale. Donc $D = 0$ et A est semblable donc égale à la matrice nulle. Ainsi $A = 0$.
Réciproquement, la matrice nulle est diagonalisable et nilpotente.
$\boxed{\text{La seule matrice de } M_n(\mathbb{K}) \text{ à la fois diagonalisable et nilpotente est la matrice nulle.}}$

Q17. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On admet l'existence de la décomposition de Dunford. Montrons l'unicité.

- Soient (D, N) et (D', N') deux couples qui conviennent. $A = D + N = D' + N'$, avec D, D' diagonalisables, N, N' nilpotentes, $DN = ND$, $D'N' = N'D'$. De plus D et N sont des polynômes en A.
- D' commute avec N', donc avec $A = D' + N'$. Alors D' commute avec tout polynôme en A, donc D' commute avec D.
- De même, N' commute avec D', donc avec $A = D' + N'$. Alors N' commute avec tout polynôme en A, donc N' commute avec N.
- On a $D - D' = N' - N$.
- D et D' sont diagonalisables et commutent. D'après la question **Q14**, $D - D'$ est diagonalisable.
- N et N' sont nilpotents et commutent. D'après la question **Q15**, $N' - N$ est nilpotente.
- $D - D' = N' - N$ est à la fois diagonalisable et nilpotente. D'après la question **Q16**, cette matrice est la matrice nulle.
- On en déduit que $D - D' = N' - N = 0$, d'où $D = D'$ et $N = N'$.
  $\boxed{\text{Il y a unicité du couple } (D, N) \text{ dans la décomposition de Dunford.}}$

Partie IV - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

Q18. • Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$. On considère les matrices suivantes A et B de $M_n(\mathbb{C})$:

$$A = \mathrm{Diag}(1, 0, \dots, 0), \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonale donc diagonalisable.
On a $\chi_B(X) = (X + 1)X^{n-1}$, $\mathrm{Sp}(B) = \{0, -1\}$, $\dim(\ker(B + I_n)) = 1$. Puisque B est de rang 1, on a $\dim(\ker(B)) = n - 1$ par le théorème du rang, donc $\dim(\ker(B + I_n)) + \dim(\ker(B)) = (n - 1) + 1 = n$ donc B est diagonalisable.
La matrice C vérifie $\chi_C(X) = X^n$ donc $C^n = 0$. La matrice C est nilpotente non nulle, donc non diagonalisable.
Finalement, A et B sont dans $\mathcal{D}$ mais $C = A + B \notin \mathcal{D}$. Donc $\mathcal{D}$ n'est pas stable par combinaison linéaire et $\boxed{\mathcal{D} \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$

• Le produit matriciel $\left| \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) & \to & M_n(\mathbb{C}) \\ (A, B) & \mapsto & AB \end{array} \right.$ est une application bilinéaire sur $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$ avec $M_n(\mathbb{C})$ de dimension finie, donc est une application continue.

Donc pour $P \in GL_n(\mathbb{C})$, $\boxed{\text{l'application} \left| \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{C}) & \to & M_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array} \right. \text{est continue.}}$

Q19. Montrons que l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrons qu'il existe une suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$ qui converge vers A.
$A \in M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ inversible et $T \in T_n^+(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure, telles que $P^{-1}AP = T$. Notons

$$T = \begin{pmatrix} d_1 & & & t_{i,j} \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}. \quad \text{On pose} \quad \forall k \geq 1, \quad T_k = \begin{pmatrix} d_1 + \frac{1}{k} & & & t_{i,j} \\ & d_2 + \frac{2}{k} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n + \frac{n}{k} \end{pmatrix}.$$

On a $\lim\limits_{k\to+\infty} T_k = T$. Posons $B_k = PT_kP^{-1}$. Par continuité du produit matriciel,

$$\lim_{k\to+\infty} B_k = \lim_{k\to+\infty}(PT_kP^{-1}) = P\left(\lim_{k\to+\infty} T_k\right)P^{-1} = PTP^{-1} = A.$$

Montrons que pour k assez grand, la matrice T_k est diagonalisable. Notons $\forall k \geq 1,\ \forall i \in [|1,n|], \lambda_i^{(k)} = d_i + \dfrac{i}{k}$. Les valeurs propres de T_k sont $\mathrm{Sp}(T_k) = \left\{\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_n^{(k)}\right\}$. Montrons que pour k assez grand, ces valeurs propres de T_k sont distinctes. Soient $i < j$ deux entiers de $[|1,n|]$.

$$\begin{aligned}
&\text{Si } d_i = d_j : \quad \lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} = \left(d_j + \frac{j}{k}\right) - \left(d_i + \frac{i}{k}\right) = \frac{j-i}{k} > 0.\\
&\text{Si } d_i \neq d_j : \quad \lambda_j^{(k)} - \lambda_i^{(k)} = \left(d_j + \frac{j}{k}\right) - \left(d_i + \frac{i}{k}\right) = d_j - d_i + \frac{j-i}{k} \underset{k\to+\infty}{\to} d_j - d_i \neq 0.
\end{aligned}$$

Si $d_i \neq d_j$, l'équation

$$d_j - d_i + \frac{j-i}{k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{j-i}{d_j - d_i}$$

possède soit aucune solution si $-\dfrac{j-i}{d_j-d_i} \notin \mathbb{N}^*$, soit une unique solution. On en déduit que

$$\forall k > N = \max_{1\leq i<j\leq n,\ \text{tels que } d_j - d_i \neq 0}\left(-\frac{j-i}{d_j-d_i}\right), \quad \forall (i,j) \in [|1,n|]^2, i \neq j \Rightarrow \lambda_i^{(k)} \neq \lambda_j^{(k)}.$$

Ainsi pour $k \geq N+1$, la matrice T_k possède n valeurs propres distinctes donc est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
Puisque B_k et T_k sont semblables, B_k est aussi diagonalisable pour $k \geq N+1$.
Donc $A = \lim\limits_{k\to+\infty} B_k$ est limite d'une suite de matrices diagonalisable.

$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{D} \text{ des matrices diagonalisables est dense dans } M_n(\mathbb{C}).}$

Q20. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ donc A admet une unique décomposition de Dunford (D,N). On note $\varphi : \left|\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{D} \\ A & \mapsto & D \end{array}\right.$.
D'après la question **Q2**, la décomposition de Dunford de A diagonalisable est $(D,N) = (A,0)$.
Donc $\boxed{\forall A \in \mathcal{D}, \varphi(A) = A}$ i.e. $\boxed{\varphi \text{ est l'application identité sur } \mathcal{D}.}$
Supposons par l'absurde que φ soit continue sur $M_n(\mathbb{C})$.
Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. D'après la question **Q19**, $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$, donc il existe une suite $(B_k)_{k\geq 0}$ de matrices diagonalisables qui converge vers A. Puisque $B_k \in \mathcal{D}$, on a $\varphi(B_k) = B_k$. Par continuité de φ :

$$\varphi(A) = \lim_{k\to+\infty} \varphi(B_k) = \lim_{k\to+\infty} B_k = A,$$

donc $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \varphi(A) = A$ et φ est l'application identité sur $M_n(\mathbb{C})$. Montrons que ceci est absurde.
Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente non nulle. Par exemple, la matrice suivante est nilpotente (car $\chi_N(X) = X^n$) et non nulle :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après la question **Q2**, $\varphi(N) = 0 \neq N$. Donc φ ne peut pas être l'application identité sur $M_n(\mathbb{C})$.
On a montré que $\boxed{\varphi \text{ n'est pas continue sur } M_n(\mathbb{C}).}$