

Corrigé du DS04 du 04/11/2025 (2h) Sujet B (MPI)

Exercice 1 : Un calcul de distance

Dans l'espace euclidien $(E, (\mid))$ choisi, le produit scalaire de deux matrices A et B est :

$$(A|B) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) = \text{Tr}(A^T B) = aa' + bb' + cc' + dd',$$

et la norme d'une matrice A est

$$\|A\| = \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(A|A)} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Q1. Par définition d'une matrice symétrique / antisymétrique, on a

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2} + E_{2,1}, E_{2,2}),$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}(E_{1,2} - E_{2,1}),$$

donc $\dim(F) = 3$ et $\dim(G) = 1$.

De plus, $F \subset G^\perp$ car si $A \in F$ et $B \in G$, alors il existe $(a, b, c, x) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$(A|B) = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} \right) = bx - bx = 0.$$

Enfin, $\dim(F) = 3 = \dim(E) - \dim(G) = \dim(G^\perp)$.

Par inclusion et égalité des dimensions, on a donc $F = G^\perp$, ce qui amène $E = F \oplus G$ (puisque'on est en dimension finie, un SEV et son orthogonal sont toujours supplémentaires).

Ainsi, F et G sont bien des supplémentaires orthogonaux.

Q2. Vu que F est un SEV de dimension finie de E (l'espace E étant lui-même de dimension finie), on a

$$d(M, F) = \|M - p_F(M)\| = \|p_G(M)\|.$$

Puisque la matrice $N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ forme une base orthonormée de G , on a directement par le cours :

$$p_G(M) = (M|N)N = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donc finalement

$$d(M, F) = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

* * *

Exercice 2 : Similitudes d'un espace euclidien

Adaptation du corrigé d'Arnaud Moncet, professeur en MP au lycée de La Borde Basse (Castres, 81)

Q1. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A , i.e. l'endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A .

Soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $u(X) = (x + 2y, -2x + y)$ donc

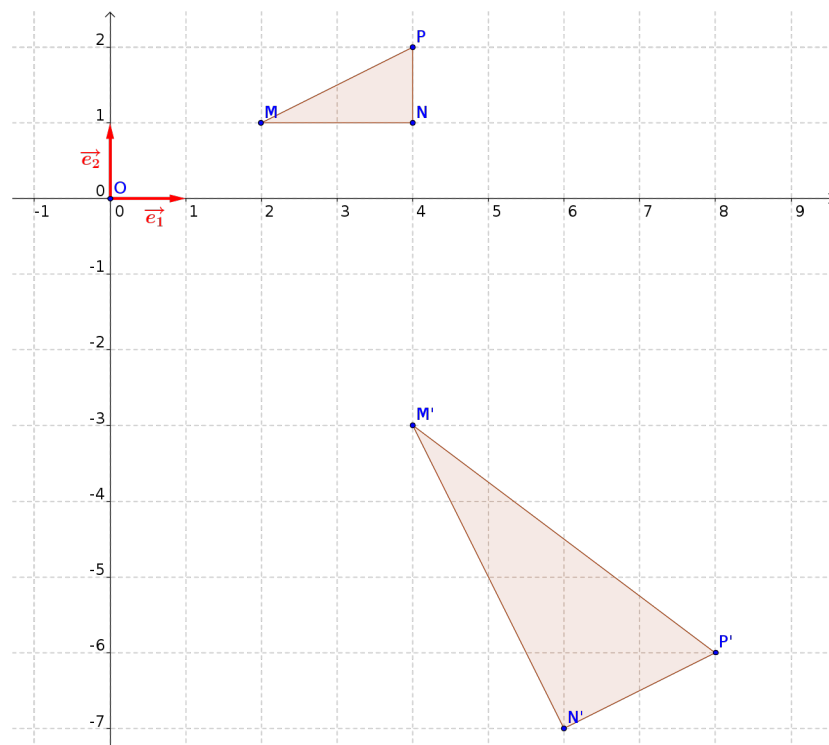
$$\|u(X)\| = \sqrt{(x + 2y)^2 + (-2x + y)^2} = \sqrt{x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2} = \sqrt{5} \|X\|$$

d'où u est une similitude de rapport $k = \sqrt{5}$.

Q2. (a) Déterminons les images M', N', P' : en appliquant u , on obtient :

$$M' = u(2, 1) = (4, -3), \quad N' = u(4, 1) = (6, -7), \quad P' = u(4, 2) = (8, -6).$$

(b) Représentons les points dans le plan :



Le triangle MNP étant rectangle en N , son aire vaut : $\mathcal{A}_{MNP} = \frac{MN \times NP}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$.

L'aire de $M'N'P'$ vaut : $\mathcal{A}_{M'N'P'} = \left| \frac{1}{2} \det_{bc}(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}) \right| = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} \right| = 5$

(bc désigne la base canonique).

Finalement : $\mathcal{A}_{M'N'P'} = 5\mathcal{A}_{MNP} = k^2\mathcal{A}_{MNP}$, avec $k = \sqrt{5}$ le rapport de la similitude.

Remarque : le rapport $k^2 = 5$ entre les deux aires correspond à la valeur absolue du déterminant de u .

Q3. (a) Soit $u \in \text{Sim}(E)$ de rapport $k > 0$.

Si $x \in \text{Ker}(u)$, alors $k\|x\| = \|u(x)\| = \|0\| = 0$, donc $\|x\| = 0$ car $k \neq 0$, d'où $x = 0$ par séparation de la norme. On a donc $\text{Ker}(u) = \{0\}$ (l'inclusion réciproque étant évidente) d'où u est injectif.

Comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que u est bijectif.

(b) Montrons que $\text{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $(\text{GL}(E), \circ)$.

— $\text{Sim}(E) \subset \text{GL}(E)$ d'après ce qui précède.

— $\text{Sim}(E)$ contient le neutre Id_E du groupe $(\text{GL}(E), \circ)$, qui est une similitude de rapport 1 puisque pour tout x dans E , $\|\text{Id}_E(x)\| = \|x\|$.

— **Stabilité par $\circ$:**

Soient u et $v \in \text{Sim}(E)$, de rapports respectifs k et k' dans $\mathbb{R}_+^*$.

On a alors pour tout $x \in E$: $\|u \circ v(x)\| = k\|v(x)\| = kk'\|x\|$ avec $kk' > 0$ car $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un groupe. Ainsi, $u \circ v$ est une similitude de rapport kk' , ce qui montre que $\text{Sim}(E)$ est stable par $\circ$.

— **Stabilité par inverse :**

On reprend la même similitude u .

Pour tout $x \in E$: $\|x\| = \|u \circ u^{-1}(x)\| = k\|u^{-1}(x)\|$, d'où $\|u^{-1}(x)\| = \frac{1}{k}\|x\|$ avec $\frac{1}{k} > 0$.

Ainsi, u^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$, ce qui montre que $\text{Sim}(E)$ est stable par inverse.

Finalement, $\text{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $(\text{GL}(E), \circ)$, donc $\text{Sim}(E)$ est un groupe pour la loi $\circ$.

Q4. (a) Fait en cours :

$\Rightarrow$ Supposons $u \in \mathcal{O}(E)$.

- A est inversible car u est bijective.
- Les colonnes de A sont les coordonnées des $u(e_j)$ dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$, donc on a

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \quad A[i, j] = (u(e_j)|e_i)$$

(d'après l'expression des coordonnées dans une base orthonormée).

- De même, les colonnes de A^{-1} sont les coordonnées des $u^{-1}(e_j)$ dans $(e_1, \dots, e_n)$, donc

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \quad A^{-1}[i, j] = (u^{-1}(e_j)|e_i).$$

Puisque u conserve le produit scalaire, on en déduit :

$$\forall (i, j) \in [1, n]^2, \quad A^{-1}[i, j] = (u(u^{-1}(e_j))|u(e_i)) = (e_j|u(e_i)) = (u(e_i)|e_j) = A[j, i],$$

ce qui montre bien que $A^{-1} = A^T$.

On a donc $A^T A = I_n$.

$\Leftarrow$ Supposons $A^T A = I_n$, et montrons que u conserve la norme.

Soit $x \in E$, notons $X = [x]_{\mathcal{B}}$ (le vecteur colonne formé des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$).

Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a $\|x\|^2 = X^T X$ (la somme des carrés des coordonnées).

En outre, $[u(x)]_{\mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \times [x]_{\mathcal{B}} = AX$, donc

$$\|u(x)\|^2 = (AX)^T (AX) = X^T \underbrace{(A^T A)}_{=I_n} X = X^T X = \|x\|^2,$$

c'est-à-dire $\|u(x)\| = \|x\|$ donc finalement $u \in \mathcal{O}(E)$.

(b) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E .

Par définition et homogénéité de la norme : u est une similitude de rapport $k > 0$ si et seulement si $\frac{1}{k}u$ est une isométrie vectorielle, ce qui revient à dire d'après la question précédente que $(\frac{1}{k}A)^T \times (\frac{1}{k}A) = I_n$. Donc finalement :

$$\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } k > 0 \text{ si, et seulement si, } A^T A = k^2 I_n}.$$

Q5. (a) Notons u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

Après calculs on trouve $A^T A = 9I_3$, donc d'après la question précédente et le caractère orthonormé de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, u est une similitude de rapport 3.

Remarque

On peut aussi calculer $\|u(x, y, z)\|$ en fonction de $\|(x, y, z)\|$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) Vu la relation précédente, la matrice de la similitude u^{-1} est $A^{-1} = \frac{1}{9}A^T = \boxed{\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$.

(c) Soit $f \in \mathcal{O}(E)$, de matrice M dans la base canonique.

La matrice de $u^{-1} \circ f \circ u$ dans la base canonique est $N = A^{-1}MA = \frac{1}{9}A^TMA$.

Calculons N^TN .

$$\begin{aligned} N^TN &= \frac{1}{81}A^TM^TAA^TMA \\ &= \frac{1}{9}A^TM^TMA && \text{car } A^TA = A \times 9A^{-1} = 9I_3 \\ &= \frac{1}{9}A^TA && \text{car } MM^T = I_3, \text{ puisque } f \in \mathcal{O}(E) \\ &= I_3 && \text{car } A^TA = 9I_3. \end{aligned}$$

Comme la base canonique est orthonormée, on en déduit grâce à la question **Q4(a)** que

$$\boxed{u^{-1} \circ f \circ u \in \mathcal{O}(E)}.$$

Q6. Soit u un endomorphisme de E possédant la propriété de l'énoncé. En particulier, l'image par u de $S(0, 1)$ est égale à $S(0, k)$ pour un certain $k > 0$.

Montrons que u est une similitude de rapport k .

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, donc il appartient à $S(0, 1)$.

On en déduit que son image par u appartient à $S(0, k)$, d'où $\left\|u\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = k$.

Or $\left\|u\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \left\|\frac{1}{\|x\|}u(x)\right\| = \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$, d'où $\|u(x)\| = k\|x\|$, cette dernière égalité restant valable lorsque x est le vecteur nul puisque $u(0) = 0$.

Nous avons ainsi montré que $\boxed{u \text{ est une similitude de } E}$.

Q7. $\Rightarrow$ Soit $u \in \text{Sim}(E)$ de rapport $k > 0$.

Alors $\boxed{u = h \circ v = v \circ h \text{ avec } h = k \text{Id}_E \text{ une homothétie vectorielle non nulle de } E \text{ et } v = \frac{1}{k}u \in \mathcal{O}(E)}$,

car $v \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall x \in E$, $\|v(x)\| = \left\|\frac{1}{k}u(x)\right\| = \frac{1}{k}\|u(x)\| = \frac{1}{k}k\|x\| = \|x\|$.

Remarque

La solution n'est pas unique : on peut aussi prendre $h = -k \text{Id}_E$ et $v = -\frac{1}{k}u$.

$\Leftarrow$ Soit $u = h \circ v$ avec h une homothétie non nulle de E et $v \in \mathcal{O}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ le rapport de h . On a $u \in \mathcal{L}(E)$ (car $\mathcal{L}(E)$ est stable par composition) et

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|\lambda v(x)\| = |\lambda| \cdot \|v(x)\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

avec $|\lambda| > 0$, donc $\boxed{u \text{ est une similitude}}$ de rapport $|\lambda|$.

Q8. $A = HB$ avec $H = \sqrt{5}I_2$ qui est la matrice d'une homothétie (dans la base canonique) et $B = \frac{1}{\sqrt{5}}A$.

Notons v l'endomorphisme canoniquement associé à B .

L'endomorphisme u canoniquement associé à A étant une similitude de rapport $\sqrt{5}$ (cf. **Q1**), $v = \frac{1}{\sqrt{5}}u$ est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ (cf. preuve de la question précédente).

Son déterminant est égal à 1 (puisque $\det(v) = \det\left(\frac{1}{\sqrt{5}}A\right) = \frac{1}{5}\det(A) = 1$) donc il s'agit d'une rotation de $\mathbb{R}^2$.

Son angle θ vérifie $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$ et $\sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} < 0$ (puisque $\frac{1}{\sqrt{5}}A = R_\theta$), donc $\theta \in]-\pi, 0[$, et

on en déduit $\theta = -\arccos(1/\sqrt{5})$. Finalement, $\boxed{v \text{ est la rotation de } \mathbb{R}^2 \text{ d'angle } -\arccos(1/\sqrt{5})}$.

Remarque

De même que dans la question précédente, la solution n'est pas unique : on peut aussi prendre $H = -\sqrt{5} I_2$ et $B = -\frac{1}{\sqrt{5}} A$, qui est la matrice de la rotation d'angle $-\arccos(1/\sqrt{5}) + \pi$.

Q9. (a) Soient x et y dans E . On a :

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y | x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2 \\ \|x - y\|^2 &= \langle x - y | x - y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

d'où par différence : $\langle x | y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ (formule de polarisation).

(b) $\Rightarrow$ Si u est une similitude de rapport $k > 0$, alors pour tous x et y dans E :

$$\begin{aligned}\langle u(x) | u(y) \rangle &= \frac{1}{4}(\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x) - u(y)\|^2) && \text{d'après la formule de polarisation} \\ &= \frac{1}{4}(\|u(x + y)\|^2 - \|u(x - y)\|^2) && \text{car } u \text{ est linéaire} \\ &= \frac{1}{4}(k^2\|x + y\|^2 - k^2\|x - y\|^2) && \text{car } u \text{ est une similitude de rapport } k \\ &= k^2\langle x | y \rangle && \text{d'après la formule de polarisation.}\end{aligned}$$

On a donc bien : $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x) | u(y) \rangle = k^2\langle x | y \rangle$.

$\Leftarrow$ Réciproquement, si l'égalité $\langle u(x) | u(y) \rangle = k^2\langle x | y \rangle$ est vérifiée pour tous x et y de E , alors en particulier pour $x = y$ on a $\|u(x)\|^2 = k^2\|x\|^2$ d'où $\|u(x)\| = k\|x\|$ (puisque $k > 0$) et ainsi u est une similitude de rapport k .

Q10. (a) Soit $u \in \text{Sim}(E)$ de rapport $k > 0$ et soient x et y dans E tels que $\langle x | y \rangle = 0$.

D'après la question précédente, $\langle u(x) | u(y) \rangle = k^2\langle x | y \rangle = 0$. Ainsi, u conserve l'orthogonalité.

(b) Soient i et j dans $[1, n]$.

$$\langle e_i + e_j | e_i - e_j \rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1 - 1, \text{ donc } \langle e_i + e_j | e_i - e_j \rangle = 0.$$

Comme u préserve l'orthogonalité par hypothèse, on a aussi

$$\langle u(e_i + e_j) | u(e_i - e_j) \rangle = 0,$$

ce qui donne par linéarité de u : $\langle u(e_i) + u(e_j) | u(e_i) - u(e_j) \rangle = 0$, c'est-à-dire

$$\|u(e_i)\|^2 - \|u(e_j)\|^2 = 0, \text{ d'où } \|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|.$$

(c) Soit k la valeur commune des $\|u(e_i)\|$, $i \in [1, n]$.

On a $k \geq 0$, et $k \neq 0$, sinon on aurait $u(e_1) = \dots = u(e_n) = 0$ et donc $u = 0$, ce qui est impossible car l'endomorphisme u est non nul par hypothèse. Donc $k > 0$.

Soit $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\text{On a } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ d'où, par linéarité, } u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i).$$

Les e_i étant deux à deux orthogonaux, il en est de même des $u(e_i)$ car u conserve l'orthogonalité, donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \|u(e_i)\|^2 = k^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = k^2 \|x\|^2$$

(la dernière égalité provient du caractère orthonormé de la base $\mathcal{B}$), et donc $\|u(x)\| = k\|x\|$.

On a ainsi montré que u est une similitude de rapport k .

Q11. Soient x et y dans E , λ dans $\mathbb{R}$. On veut montrer que le vecteur $z = \lambda u(x) + u(y) - u(\lambda x + y)$

est nul.

$$\begin{aligned}
 \|z\|^2 &= \langle \lambda u(x) + u(y) - u(\lambda x + y) | \lambda u(x) + u(y) - u(\lambda x + y) \rangle \\
 &= \|\lambda u(x) + u(y)\|^2 - 2\langle \lambda u(x) + u(y) | u(\lambda x + y) \rangle + \|u(\lambda x + y)\|^2 \\
 &= \lambda^2 \|u(x)\|^2 + 2\lambda \langle u(x) | u(y) \rangle + \|u(y)\|^2 - 2\lambda \langle u(x) | u(\lambda x + y) \rangle - 2\langle u(y) | u(\lambda x + y) \rangle + k^2 \|\lambda x + y\|^2 \\
 &= \lambda^2 k^2 \|x\|^2 + 2\lambda k^2 \langle x | y \rangle + k^2 \|y\|^2 - 2\lambda k^2 \langle x | \lambda x + y \rangle - 2k^2 \langle y | \lambda x + y \rangle + k^2 \lambda^2 \|x\|^2 + 2k^2 \lambda \langle x | y \rangle + k^2 \|y\|^2 \\
 &= k^2 (\lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x | y \rangle + \|y\|^2 - 2\lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda \langle x | y \rangle - 2\lambda \langle x | y \rangle - 2\|y\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x | y \rangle + \|y\|^2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

d'où $z = 0$ et par suite $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$, ce qui montre que $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E}$.

D'après **Q9(b)**, on en déduit que $\boxed{u \text{ est une similitude de } E}$.

* * *