DS04 du 09/12/2023 (4h)
Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 3 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1

1. On se place sur $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_1$.
   Soit $u : E \to E$ l'endomorphisme défini par
   $$\forall f \in E, \qquad u(f) : x \mapsto \int_0^x f.$$
   Montrer que u est continu et calculer la norme subordonnée $|||u|||$.
   Indication : considérer $f_n : t \mapsto ne^{-nt}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ fixé, soit la forme linéaire
   $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n a_i x_i \end{array} \right.$.
   (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Calculer la norme $|||u|||_2$ subordonnée à la norme $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$.
   (c) Calculer la norme $|||u|||_\infty$ subordonnée à la norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

* * *

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.

1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ?

* * *

Exercice 3 : Problème sur la décomposition de Dunford

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

Théorème 1
Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :

(1) $A = D + N$;

(2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;

(3) N est nilpotente ;

(4) $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
Le couple (D, N) s'appelle la **décomposition de Dunford** *de A.*

Partie I - Quelques exemples

1. (a) Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.

   (b) Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.

   (c) Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$?

2. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 8\\3 & -1 & 6\\-2 & 0 & -5\end{pmatrix}$.

   (a) Calculer son polynôme caractéristique χ_A.

   (b) Donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

4. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

   (a) Justifier que le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice A^2.

   (b) Démontrer que le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\2 & 0 & 1\\1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

5. (a) La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?

   (b) Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\mathrm{id})^2$.

6. (a) Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :
   $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_1\},\ \ker(u - 2\mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_2\},\ \ker(u - 2\mathrm{id})^2 = \mathrm{vect}\{e_2, e_3\}$.

   (b) Ecrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

7. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

8. Décomposer en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2V(X) = 1 \text{ avec } \deg(U) < 2 \text{ et } \deg(V) < 1.$$

9. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{id})$.

   (a) Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Démontrer que p est le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(u - 2\mathrm{id})^2$ et q est le projecteur sur $\ker(u - 2\mathrm{id})^2$ parallèlement à $\ker(u - \mathrm{id})$.

10. On pose $d = p + 2q$.

    (a) Ecrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question **6**).

    (b) Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.
    (a) Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
    (b) En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.
    Indication : pour tout $1 \leq i \leq p$, on pourra considérer v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.
12. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.
13. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.
14. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.
15. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A.
Etablir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Partie IV - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

16. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonalisables.
    (a) $\mathcal{D}$ est-il un espace vectoriel ?
    (b) Si P est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$, justifier que l'application de $M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue.
17. Démontrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.
18. Si (D, N) est le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A, on note φ l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{D}$ qui à la matrice A associe la matrice $\mathcal{D}$.
    (a) Justifier que φ est l'application identité sur $\mathcal{D}$.
    (b) En déduire que l'application φ n'est pas continue.