DS04 du 04/11/2025 (2h)
Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 2 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

Exercice 1 : Un calcul de distance

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique :
$(A|B) = Tr(A^T B)$, et on note $\|A\| = \sqrt{(A|A)}$ la norme associée.
On considère les SEV : $F = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ (matrices symétriques) et $G = \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ (matrices antisymétriques).

Q1. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Q2. Déterminer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ au sous-espace F.

* * *

Exercice 2 : Similitudes d'un espace euclidien

Dans ce problème, E est un espace vectoriel euclidien non nul muni d'un produit scalaire que l'on notera $< \mid >$, de norme associée $\| \,.\, \|$.
On dira qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une *similitude* de E lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout vecteur x de $E, \|u(x)\| = k\|x\|$. On dira dans ce cas que u est *une similitude de rapport* k.
On notera $\mathrm{Sim}(E)$ l'ensemble des similitudes de E, et on notera classiquement $\mathcal{O}(E)$ le groupe orthogonal de E (c'est-à-dire le groupe des isométries vectorielles de E).
L'objectif de ce problème est de définir et de caractériser les similitudes d'un espace euclidien.

Partie I - Exemples, propriétés

Q1. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est, dans la base canonique $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ de $\mathbb{R}^2$, la matrice d'une similitude u dont on précisera le rapport.

Q2. *Interprétation géométrique avec la similitude u de la question précédente* :
Le plan $\mathbb{R}^2$ est rapporté à son repère orthonormé canonique $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}) = ((0,0),(1,0),(0,1))$.
On considère les trois points

$$M = (2,1), \quad N = (4,1), \quad P = (4,2)$$

et on définit les points M', N', P' par les relations

$$u(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'}, \quad u(\overrightarrow{ON}) = \overrightarrow{ON'}, \quad u(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP'}.$$

(a) Déterminer M', N', P'.

(b) Représenter les triangles MNP et $M'N'P'$ et comparer leurs aires.

Q3. **(a)** Démontrer que tout élément de $\mathrm{Sim}(E)$ est bijectif.

(b) Démontrer que $\mathrm{Sim}(E)$, muni de la loi de composition, est un groupe.

Q4. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

(a) Redémontrer que $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $A^T A = I_n$.

(b) Caractériser par une relation matricielle une similitude de rapport k.

Q5. *Exemple dans* $\mathbb{R}^3$:

(a) Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une similitude u dont on donnera le rapport.

(b) Donner la matrice de la similitude u^{-1}.

(c) Vérifier que, pour tout élément f de $\mathcal{O}(E)$, $u^{-1} \circ f \circ u \in \mathcal{O}(E)$.

Q6. On appelle sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$, l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\| = r$:

$$S(0, r) = \{x \in E,\ \|x\| = r\}.$$

On suppose que u est un endomorphisme de E tel que l'image par u de toute sphère de centre 0 est une sphère de centre 0 :

$$\forall r > 0,\ \exists \rho > 0, \quad u(S(0, r)) = S(0, \rho).$$

Montrer que u est une similitude de E.

Indication : on pourra remarquer que pour $y \in E \setminus \{0_E\}$, *on a* $\left\| \dfrac{y}{\|y\|} \right\| = 1$.

Partie II - Assertions équivalentes

Q7. On rappelle qu'une homothétie vectorielle de E est une application de la forme αId_E avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que $u \in \mathrm{Sim}(E)$ si et seulement si u est la composée d'une homothétie vectorielle non nulle de E et d'un élément de $\mathcal{O}(E)$.

Q8. *Exemple* : Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ comme produit de la matrice d'une homothétie vectorielle et de la matrice d'une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$ dont on précisera la nature (rotation d'angle à déterminer ou réflexion d'axe à déterminer).

Q9. **(a)** Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad < x \mid y > = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right).$$

(b) En déduire qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une similitude de rapport $k > 0$ si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad < u(x) \mid u(y) > = k^2 < x \mid y > .$$

Q10. Soit u une similitude de rapport $k > 0$.

(a) Montrer que u conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire que les images de deux vecteurs orthogonaux restent des vecteurs orthogonaux.

Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme non nul de E qui conserve l'orthogonalité, et on considère $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

(b) Démontrer que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \langle e_i + e_j \mid e_i - e_j \rangle = 0,$$

puis que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|.$$

On note k la valeur commune prise par tous les $\|u(e_i)\|$.

(c) Justifier que $k > 0$, puis montrer que u est une similitude de rapport k.

On a ainsi démontré que les similitudes sont exactement les endomorphismes non nuls qui conservent l'orthogonalité.

Q11. Soit u une application de E dans E (non supposée linéaire) telle qu'il existe un réel $k > 0$ pour lequel :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad < u(x) \mid u(y) > = k^2 < x \mid y > .$$

Démontrer que u est un endomorphisme de E, puis que u est une similitude de E.

* * *