

# Corrigé du DS04 du 04/11/2025 (2h)

## Sujet A (MPI\*)

### Première partie

1. Par hypothèse,  $h$  s'annule à l'ordre  $N + 1$  (avec  $N \geq 1$ ) dans  $[a, b]$  donc il existe des réels  $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_m \leq b$  et des entiers  $k_1, \dots, k_m \geq 1$  tels que  $k_1 + \dots + k_m = N + 1$  et chaque  $c_i$  annule  $h, h', \dots, h^{(k_i-1)}$  (on dira que  $c_i$  est un "zéro de  $h$  de multiplicité au moins  $k_i$ ", même si  $h$  n'est pas un polynôme).

1a. Par hypothèse,  $h'$  vérifie

$$\forall i \in [1, m], \forall k \in [0, k_i - 1], \quad (h')^{(k)}(c_i) = h^{(k+1)}(c_i) = 0.$$

Montrons qu'elle possède des zéros supplémentaires.

Par le théorème de Rolle appliqué à  $h$  sur chaque intervalle  $[c_i, c_{i+1}]$  (pour  $1 \leq i \leq m - 1$ ), la fonction dérivable  $h$  vérifie  $h(c_i) = h(c_{i+1}) (= 0)$  donc  $h'$  s'annule au moins  $m - 1$  fois (0 fois si  $m = 1$ ), en des points  $c'_1, \dots, c'_{m-1}$  vérifiant

$$a \leq c_1 < c'_1 < c_2 < c'_2 < \dots < \dots < c'_{m-2} < c_{m-1} < c'_{m-1} < c_m \leq b.$$

Ces zéros de  $h'$  sont différents des  $(c_i)_{1 \leq i \leq m}$  et sont dans  $[a, b]$ , donc en les ajoutant aux zéros initiaux de  $h'$ , on obtient que  $h'$  s'annule à l'ordre

$$(k_1 - 1) + \dots + (k_m - 1) + (m - 1) = k_1 + \dots + k_m - 1 = N$$

dans l'intervalle  $[a, b]$ .

1b. Puisque  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on peut itérer le raisonnement précédent.

Par récurrence immédiate, on obtient que  $h^{(N)}$  s'annule à l'ordre  $N + 1 - N = 1$  dans  $[a, b]$ , c'est-à-dire que  $h^{(N)}$  s'annule au moins en un point  $c \in [a, b]$  (c'est le cas  $m = 1$  et  $k_1 = 1$  dans la définition donnée).

Dans la suite de cette partie,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et par hypothèse :

$$P = \lambda(X - t_1)^{k_1} \dots (X - t_m)^{k_m}$$

avec  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ,  $a < t_1 < \dots < t_m < b$  et  $k_1 + \dots + k_m = \deg(P) \geq m$  (en effet, la liste des zéros du polynôme  $P$  est donnée, ainsi que leurs multiplicités  $k_i \geq 1$ ).

2. 2a. Supposons que  $Q \in \mathbb{R}[X]$  vérifie l'hypothèse donnée, c'est-à-dire que  $\deg(Q) < \deg(P)$  et  $Q$  s'annule en  $t_1, \dots, t_m$ , avec chaque  $t_i$  de multiplicité au moins  $k_i$ . Alors  $(X - t_i)^{k_i}$  divise  $Q$  pour tout  $1 \leq i \leq m$ , donc  $\prod_{i=1}^m (X - t_i)^{k_i}$  divise  $Q$  (puisque ces polynômes sont premiers entre eux deux à deux). Finalement,  $P$  divise  $Q$  avec  $\deg(P) > \deg(Q)$  donc nécessairement  $Q = 0$ .

2b. Notons  $d = \deg(P) \geq m \geq 1$ . L'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_{d-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{k_1 + \dots + k_m} = \mathbb{R}^d \\ Q & \longmapsto & (Q(t_1), \dots, Q^{(k_1-1)}(t_1), \dots, Q(t_m), \dots, Q^{(k_m-1)}(t_m)) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels : la linéarité est évidente (par linéarité de l'évaluation et de la dérivation), l'injectivité vient du fait que si  $Q \in \text{Ker}(\varphi)$ , alors  $Q$  vérifie les conditions de la question précédente, donc  $Q = 0$ , et la bijectivité résulte alors de l'égalité des dimensions de  $\mathbb{R}_{d-1}[X]$  et  $\mathbb{R}^d$ . Ainsi, la liste  $(f(t_1), \dots, f^{(k_1-1)}(t_1), \dots, f(t_m), \dots, f^{(k_m-1)}(t_m)) \in \mathbb{R}^d$  possède un unique antécédent par  $\varphi$ , c'est-à-dire qu'il existe un unique  $H(f, P)$  dans  $\mathbb{R}_{d-1}[X]$  tel que

$$\forall i \in [1, m], \forall k \in [0, k_i - 1], \quad H(f, P)^{(k)}(t_i) = f^{(k)}(t_i).$$

Dans la suite, on pose

$$\forall t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}, \quad Q(f, P)(t) = \frac{f(t) - H(f, P)(t)}{(t - t_1)^{k_1} \dots (t - t_m)^{k_m}} = \frac{\lambda(f(t) - H(f, P)(t))}{P(t)}.$$

- 3. 3a.** En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction  $g = f - H(f, P)$  (qui est  $\mathcal{C}^\infty$ ) en chaque point  $t_i$ , on obtient pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  et pour tout  $x \in [a, b]$  :

$$f(x) - H(f, P)(x) = \sum_{k=0}^{k_i-1} \underbrace{\frac{f^{(k)}(t_i) - H(f, P)^{(k)}(t_i)}{k!}}_{=0} (x - t_i)^k + \frac{1}{(k_i - 1)!} \int_{t_i}^x (x - t)^{k_i-1} g^{(k_i)}(t) dt,$$

donc par changement de variable affine  $t = vt_i + (1 - v)x$ , il vient

$$f(x) - H(f, P)(x) = \frac{1}{(k_i - 1)!} \int_1^0 (v(x - t_i))^{k_i-1} g^{(k_i)}(t_i v + x(1 - v)) \times (t_i - x) dv,$$

c'est-à-dire

$$f(x) - H(f, P)(x) = (x - t_i)^{k_i} \int_0^1 \frac{v^{k_i-1}}{(k_i - 1)!} g^{(k_i)}(t_i v + x(1 - v)) dv.$$

- 3b.** La fonction  $Q(f, P)$  est clairement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'ensemble  $[a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$  (en tant que quotient de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ ). Fixons  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$  et montrons que  $Q(f, P)$  se prolonge au point  $t_i$ .

Notons  $\varphi_i(x) = \int_0^1 \frac{v^{k_i-1}}{(k_i - 1)!} g^{(k_i)}(t_i v + x(1 - v)) dv$ , on a donc pour tout  $x \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$  :

$$Q(f, P)(x) = \frac{(x - t_i)^{k_i} \varphi_i(x)}{\prod_{j=1}^m (x - t_j)^{k_j}} = \frac{\varphi_i(x)}{\prod_{j \neq i} (x - t_j)^{k_j}}.$$

Nous admettons comme indiqué que  $\varphi_i$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[a, b]$  (cela se démontre facilement en appliquant le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre, qui sera étudié dans le CH.12 "interversión limite-intégrale"). Ainsi, par quotient, la fonction  $\psi_i : x \mapsto \frac{\varphi_i(x)}{\prod_{j \neq i} (x - t_j)^{k_j}}$

est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_m\}$  (qui est un voisinage réel de  $t_i$ ) et prolonge  $Q(f, P)$  au point  $t_i$ . En appliquant ce raisonnement en chaque point  $t_i$  (pour  $1 \leq i \leq m$ ), on obtient que  $Q(f, P)$  possède un prolongement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur tout l'intervalle  $[a, b]$ . De plus, en tant que prolongement continu en des points adhérents au domaine de définition de  $Q(f, P)$ , il est unique (la valeur aux points  $t_i$  est nécessairement la limite de  $Q(f, P)$  en ces points).

- 4. 4a.** Dans le cas où  $P = (X - s_0)^n$  avec  $n \geq 1$  et  $s_0 \in [a, b]$ , on a  $Q(f, P) : x \mapsto \frac{f(x) - H(f, P)(x)}{(x - s_0)^n}$ , qui d'après la question précédente admet un prolongement  $\mathcal{C}^\infty$  à  $[a, b]$ . D'après **3a.**, le numérateur se réécrit :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) - H(f, P)(x) = (x - s_0)^n \int_0^1 \frac{v^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(s_0 v + x(1 - v)) dv,$$

donc

$$\forall s \in [a, b] \setminus \{s_0\}, \quad Q(f, P)(x) = \int_0^1 \frac{v^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(s_0 v + x(1 - v)) dv,$$

et puisque l'intégrale à paramètre  $x \mapsto \int_0^1 \frac{v^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(s_0 v + x(1 - v)) dv$  est continue sur  $[a, b]$  d'après ce qui était admis à la question précédente, on en déduit par passage à la limite :

$$Q(f, P)(s_0) = \lim_{x \rightarrow s_0} \int_0^1 \frac{v^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(s_0 v + x(1 - v)) dv = \int_0^1 \frac{v^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(s_0) dv = \frac{g^{(n)}(s_0)}{n!}.$$

Enfin,  $g^{(n)} = f^{(n)} - H(f, P)^{(n)} = f^{(n)}$  puisque  $\deg(H(f, P)) < \deg(P) = n$ , donc finalement

$$Q(f, (X - s_0)^n)(s_0) = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!}.$$

**4b.** Soit  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$  unitaires et scindés dans  $]a, b[$ , notons  $d_1 \geq 1$  et  $d_2 \geq 1$  leurs degrés respectifs. Par division euclidienne, il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$  tels que

$$H(f, P_1 P_2) = P_1 Q + R, \quad \deg(R) < \deg(P_1) = d_1 \quad (*).$$

On va maintenant identifier le quotient et le reste en évaluant en les racines de  $P_1, P_2$  et utilisant le principe d'interpolation montré en **2b.**

Notons

$$P_1 = \prod_{i=1}^{m_1} (X - t_i)^{k_i}, \quad P_2 = \prod_{i=1}^{m_2} (X - t'_i)^{k'_i},$$

avec  $m_1, m_2 \geq 1$ ,  $a < t_1 < \dots < t_{m_1} < b$ ,  $a < t'_1 < \dots < t'_{m_2} < b$ ,  $k_i \geq 1$ ,  $k'_i \geq 1$ .

- En dérivant (\*), on a pour tout  $1 \leq i \leq m_1$  et pour tout  $0 \leq k < k_i$  :

$$H(f, P_1 P_2)^{(k)}(t_i) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \underbrace{P_1^{(j)}(t_i)}_{=0} Q^{(k-j)}(t_i) + R^{(k)}(t_i) = R^{(k)}(t_i).$$

Mais  $t_i$  étant racine de  $P_1 P_2$ , on a aussi  $H(f, P_1 P_2)^{(k)}(t_i) = f^{(k)}(t_i)$ , donc  $R^{(k)}(t_i) = f^{(k)}(t_i)$  avec  $\deg(R) < \deg(P_1)$ , ce qui montre par **2b.** que  $R = H(f, P_1)$ .

- Analysons ensuite  $P_1 Q = H(f, P_1 P_2) - H(f, P_1)$  : c'est un polynôme de degré strictement inférieur à  $\deg(P_1 P_2) = d_1 + d_2$ , et il vérifie :

$$\forall 1 \leq i \leq m_1, \forall 0 \leq k < k_i, \quad (P_1 Q)^{(k)}(t_i) = 0$$

(car  $(X - t_i)^{k_i}$  divise  $P_1$ , qui divise  $P_1 Q$ ), ainsi que

$$\forall 1 \leq i \leq m_2, \forall 0 \leq k < k'_i, \quad (P_1 Q)^{(k)}(t'_i) = H(f, P_1 P_2)^{(k)}(t'_i) - H(f, P_1)^{(k)}(t'_i) = f^{(k)}(t'_i) - H(f, P_1)^{(k)}(t'_i)$$

C'est là qu'on fait intervenir la fonction  $Q(f, P_1)$  :

$$f^{(k)}(t'_i) - H(f, P_1)^{(k)}(t'_i) = (P_1 \times Q(f, P_1))^{(k)}(t'_i) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} P_1^{(j)}(t'_i) Q(f, P_1)^{(k-j)}(t'_i),$$

mais la fonction  $Q(f, P_1)$  coïncide avec le polynôme  $H(Q(f, P_1), P_2)$  en les  $t'_i$  (avec multiplicités), donc on peut réécrire

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} P_1^{(j)}(t'_i) Q(f, P_1)^{(k-j)}(t'_i) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} P_1^{(j)}(t'_i) H(Q(f, P_1), P_2)^{(k-j)}(t'_i) \\ &= (P_1 \times H(Q(f, P_1), P_2))^{(k)}(t'_i). \end{aligned}$$

En résumé, le polynôme  $P_1 Q$  vérifie

$$\forall 1 \leq i \leq m_1, \forall 0 \leq k < k_i, \quad (P_1 Q)^{(k)}(t_i) = 0 = (P_1 \times H(Q(f, P_1), P_2))^{(k)}(t_i),$$

$$\forall 1 \leq i \leq m_2, \forall 0 \leq k < k'_i, \quad (P_1 Q)^{(k)}(t'_i) = (P_1 \times H(Q(f, P_1), P_2))^{(k)}(t'_i).$$

Les polynômes  $P_1 Q$  et  $P_1 \times H(Q(f, P_1), P_2)$  coïncident donc (avec multiplicités) en  $d_1 + d_2$  points, et ils sont de degrés  $< d_1 + d_2$ , donc ils sont égaux (toujours par **2b.**). On a montré :

$$H(f, P_1 P_2) - H(f, P_1) = P_1 \times H(Q(f, P_1), P_2),$$

ce qui est la première égalité voulue.

- La seconde s'en déduit par calcul direct : par définition de  $Q$ , on a

$$\begin{aligned} P_1 P_2 Q(f, P_1 P_2) &= f - H(f, P_1 P_2) = f - H(f, P_1) - P_1 \times H(Q(f, P_1), P_2) \\ &= P_1 \times (Q(f, P_1) - H(Q(f, P_1), P_2)) \end{aligned}$$

En notant  $\tilde{f} = Q(f, P_1)$ , on a donc

$$P_1 P_2 Q(f, P_1 P_2) = P_1 \times (\tilde{f} - H(\tilde{f}, P_2)) = P_1 P_2 Q(\tilde{f}, P_2).$$

Vu que  $P_1 P_2 \neq 0$ , on en déduit par intégrité de  $\mathbb{R}[X]$  :

$$Q(f, P_1 P_2) = Q(\tilde{f}, P_2) = Q(Q(f, P_1), P_2).$$

5. On fixe  $t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$  (rappelons que  $t_1, \dots, t_m$  sont les racines de  $P$ , de multiplicités  $k_1, \dots, k_m \geq 1$ ) et on pose

$$\forall s \in [a, b], \quad Q_t(s) = (f - H(f, P))(s) - Q(f, P)(t) \prod_{i=1}^m (s - t_i)^{k_i},$$

c'est-à-dire

$$\forall s \in [a, b], \quad Q_t(s) = (f - H(f, P))(s) - \frac{1}{\lambda} Q(f, P)(t) P(s),$$

où  $\lambda$  est le coefficient dominant de  $P$ . On a  $Q_t \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R})$ .

- 5a. Pour tout  $1 \leq i \leq m$  et pour tout  $0 \leq k < k_i$  :

$$Q_t^{(k)}(t_i) = \underbrace{f^{(k)}(t_i) - H(f, P)^{(k)}(t_i)}_{=0} - \frac{1}{\lambda} Q(f, P)(t) \underbrace{P^{(k)}(t_i)}_{=0} = 0.$$

De plus,  $Q_t(t) = f(t) - H(f, P)(t) - \frac{1}{\lambda} Q(f, P)(t) P(t) = 0$  (par définition de  $Q(f, P)(t)$ ) avec  $t \notin \{t_1, \dots, t_m\}$ , donc au vu des zéros trouvés, la fonction  $Q_t$  s'annule à l'ordre  $k_1 + \dots + k_m + 1 = \deg(P) + 1 = d + 1$  dans l'intervalle  $[\min(t, t_1), \max(t, t_m)] \subset [a, b]$ .

- 5b. Si on suppose de plus  $P$  unitaire, alors  $\lambda = 1$  donc  $Q_t(s) = (f - H(f, P))(s) - Q(f, P)(t) P(s)$ . D'après la question précédente,  $Q_t$  s'annule à l'ordre  $d+1$  dans l'intervalle  $[\min(t, t_1), \max(t, t_m)]$  donc d'après 1b., il existe  $\xi \in [\min(t, t_1), \max(t, t_m)]$  tel que

$$0 = Q_t^{(d)}(\xi) = f^{(d)}(\xi) - \underbrace{H(f, P)^{(d)}(\xi)}_{=0 \text{ car } \deg(H(f, P)) < d} - Q(f, P)(t) \times \underbrace{P^{(d)}(\xi)}_{=d! \text{ car } P=X^d+\dots}.$$

Ainsi,  $f^{(d)}(\xi) = d! Q(f, P)(t)$ , c'est-à-dire

$$f(t) - H(f, P)(t) = P(t) Q(f, P)(t) = \frac{f^{(d)}(\xi)}{d!} P(t).$$

### Remarque

Le réel  $\xi$  dépend du réel  $t$  initialement fixé, ce qui n'apparaît pas dans la notation employée ! Avec une notation plus explicite, on a donc montré que :

$$\forall t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_m\}, \exists \xi(t) \in [\min(t, t_1), \max(t, t_m)], \quad f(t) - H(f, P)(t) = \frac{f^{(d)}(\xi(t))}{d!} P(t).$$

6. On suppose  $f$  absolument monotone sur  $[a, b]$  (i.e.  $f^{(n)} \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ).

Montrons que pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  scindé sur  $]a, b[$ ,  $Q(f, P)$  est absolument monotone.

- Tout d'abord, on peut se ramener au cas où  $P$  est unitaire car le polynôme d'interpolation  $H(f, P)$  ne dépend que des racines de  $P$  et de leurs multiplicités, pas du coefficient dominant de  $P$  : en notant  $\hat{P} = \frac{P}{\lambda}$ , on a  $\hat{P}$  unitaire et  $H(f, P) = H(f, \hat{P})$  donc

$$Q(f, P) = \frac{\lambda(f - H(f, P))}{P} = \frac{f - H(f, P)}{\hat{P}} = \frac{f - H(f, \hat{P})}{\hat{P}} = Q(f, \hat{P}).$$

- Procédons ensuite par récurrence sur le degré de  $P$  :

- \* **Initialisation** : si  $P$  est unitaire de degré 1, il est de la forme  $P = X - t_1$  avec  $a < t_1 < b$ . Dans ce cas,  $H(f, P)$  est le polynôme constant égal à  $f(t_1)$  donc en réutilisant la formule intégrale de la question 3a. :

$$Q(f, P) : x \mapsto \frac{f(x) - f(t_1)}{x - t_1} = \int_0^1 f'(t_1 v + x(1 - v)) dv.$$

En admettant la dérivation sous le signe intégrale (cf. CH.12), on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], \quad Q(f, P)^{(n)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^n}{\partial x^n} (f'(t_1 v + x(1 - v))) dv$$

$$= \int_0^1 (1-v)^n f^{(n+1)}(t_1 v + x(1-v)) dv \geq 0,$$

(car  $f^{(n+1)} \geq 0$  par hypothèse et  $(1-v)^n \geq 0$  pour tout  $v \in [0, 1]$ ), donc  $Q(f, P)$  est absolument monotone.

\* **Hérédité** : soit  $d \geq 1$ . Supposons que pour tout polynôme  $R$  unitaire de degré  $\geq d$  scindé dans  $]a, b[$ , on ait  $Q(f, R)$  absolument monotone, et montrons que cette propriété reste vraie au degré  $d+1$ .

Soit donc  $P$  unitaire de degré  $d+1$ , scindé dans  $]a, b[$ . En notant  $t_1 \in ]a, b[$  une des racines de  $P$ , on a  $P = (X - t_1)R$  avec  $R$  unitaire de degré  $d$ , scindé dans  $]a, b[$ . Par hypothèse de récurrence, la fonction  $g = Q(f, R)$  est absolument monotone. On en déduit par la formule de la question **4b**. que :

$$Q(f, P) = Q(f, R(X - t_1)) = Q(Q(f, R), X - t_1) = Q(g, X - t_1)$$

est elle-même absolument monotone d'après l'initialisation puisque  $g$  l'est.

\* \* \*

## Deuxième partie

On fixe  $I = [-1, 1]$ ,  $n \geq 2$  entier et  $f : I \rightarrow ]0, +\infty[$  une fonction continue.

On pose aussi pour tout  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 PQf,$$

cela définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$  (la définie-positivité est vraie notamment grâce à la stricte positivité de  $f$ ) et par restriction sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

On fixe également  $D = \lambda(X - r_1) \cdots (X - r_n) \in \mathbb{R}_n[X]$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  et  $1 \geq r_1 > \cdots > r_n \geq -1$ .

On suppose aussi  $D \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ .

### Remarque

L'énoncé ne suppose pas a priori que  $D \neq 0$  mais je me permets de le faire car on effectue une division euclidienne par  $D$  dans la question **7b**. (donc j'imagine que  $D \neq 0$  dans l'idée du concepteur).

**7. 7a.** Il s'agit ici de décomposer la forme linéaire  $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \int_{-1}^1 Pf \end{cases}$  en fonction des formes linéaires "évaluations"  $\ell_i : \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(r_i) \end{cases}$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

Pour cela, il suffit de montrer que  $(\ell_1, \dots, \ell_n)$  est une base du dual  $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$ .

Montrons que cette famille de formes linéaires est libre : si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \ell_i = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})}$  avec les  $\lambda_i$  réels, on a

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i) = 0.$$

En évaluant en  $P = L_k = \frac{\prod_{j \neq k} (X - r_j)}{\prod_{j \neq k} (r_k - r_j)}$  (le  $k^e$  polynôme interpolateur de Lagrange associé aux points  $r_1, \dots, r_n$  qui vérifie  $L_k(r_i) = \delta_{i,k}$  et  $\deg(L_k) = n-1$ ), on obtient  $\lambda_k = 0$ , et ce pour tout  $1 \leq k \leq n$ , donc la famille  $(\ell_1, \dots, \ell_n)$  est bien libre. De plus, elle est de cardinal  $n = \dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R}))$  donc c'est une base de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$ , ce qui montre l'existence (et l'unicité) de coefficients  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  réels tels que  $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ell_i$ , c'est-à-dire

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^1 Pf = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i).$$

**Remarque**

En fait, la base  $(\ell_1, \dots, \ell_n)$  est la base duale de la base de Lagrange  $(L_1, \dots, L_n)$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  : en effet, on montre facilement que pour tout  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  :

$$P = P(r_1)L_1 + \dots + P(r_n)L_n,$$

donc par définition d'une base duale :  $P(r_i) = L_i^*(P)$  pour tout  $i$  et tout  $P$ , c'est-à-dire  $\ell_i = L_i^*$ .

- 7b.** Soit  $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ . Par division euclidienne, il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$  tel que  $P = DQ + R$  et  $\deg(R) < \deg(D) = n$ . D'où

$$\int_{-1}^1 Pf = \int_{-1}^1 DQf + \int_{-1}^1 Rf = \langle D, Q \rangle + \sum_{i=1}^n \lambda_i R(r_i)$$

(d'après la question précédente puisque  $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ).

En outre,  $D \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$  et  $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  (puisque  $\deg(Q) + \deg(D) = \deg(P)$ ), donc  $\langle D, Q \rangle = 0$ . On en déduit

$$\int_{-1}^1 Pf = \sum_{i=1}^n \lambda_i R(r_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(r_i)$$

puisque pour tout  $i$ ,  $P(r_i) = \underbrace{D(r_i)}_{=0} Q(r_i) + R(r_i) = R(r_i)$ .

- 7c.** Soit  $1 \leq i \leq n$ . Le polynôme  $P_i = \prod_{j \neq i} (X - r_j)^2$  est de degré  $2(n-1) = 2n-2$  donc la formule de la question **7b.** s'applique :

$$\int_{-1}^1 P_i f = \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{P_i(r_k)}_{=0 \text{ si } k \neq i} = \lambda_i P_i(r_i).$$

Or,  $P_i(r_i) > 0$  car  $P_i$  est à valeurs positives (facteurs carrés réels) et  $r_i$  n'est pas racine de  $P_i$ . Enfin,  $\int_{-1}^1 P_i f > 0$  car la fonction  $P_i f$  est positive sur  $[-1, 1]$ , continue et non identiquement nulle puisque  $P_i(r_i)f(r_i) > 0$ . Donc  $\lambda_i = \frac{1}{P_i(r_i)} \int_{-1}^1 P_i f > 0$ .

Dans la suite, on considère les fonctions polynomiales

$$f_0 : t \mapsto 1, \quad \forall 1 \leq j \leq n-1, \quad f_j : t \mapsto (r_1 - t) \cdots (r_j - t),$$

(on a  $\deg(f_j) = j$  pour tout  $j$ ) et pour tout  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose

$$\langle P, Q \rangle_j = \langle P, Q f_j \rangle = \int_{-1}^1 P Q f_j f.$$

- 7d.** Soit  $0 \leq j \leq n-1$ . L'application  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle_j$  est clairement une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{R}_n[X]$  (par bilinéarité du produit de fonctions et linéarité de l'intégrale), donc par restriction c'est aussi une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{R}_{n-j-1}[X]$ .

**ATTENTION !**

Les propriétés de positivité et définie-positivité ne sont pas a priori vraies sur  $\mathbb{R}_n[X]$  (puisque la fonction  $f_j f$  sous l'intégrale n'est pas positive), mais on va montrer qu'elles le sont **sur le sous-espace**  $\mathbb{R}_{n-j-1}[X]$ .

Pour tout  $P \in \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$ , on a

$$\langle P, P \rangle_j = \int_{-1}^1 P^2 f_j f,$$

avec  $\deg(P^2 f_j) \leq 2(n-j-1) + j = 2n-j-2 \leq 2n-1$  donc par **7b.** :

$$\langle P, P \rangle_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i P^2(r_i) f_j(r_i).$$

Or,  $f_j$  admet pour racines  $r_1, \dots, r_j$  donc  $f_j(r_i) = 0$  si  $i \leq j$ . D'où

$$\langle P, P \rangle_j = \sum_{i=j+1}^n \lambda_i P^2(r_i) f_j(r_i).$$

En outre, pour  $i \in [j+1, n]$ ,  $f_j(r_i) = (r_1 - r_i) \cdots (r_j - r_i) > 0$ , ainsi que  $\lambda_i > 0$  (d'après **7c.**) et  $P^2(r_i) \geq 0$ , donc par somme de réels positifs  $\langle P, P \rangle_j \geq 0$ .

Enfin, si  $\langle P, P \rangle_j = 0$ , alors on a une somme nulle de réels positifs donc  $\lambda_i P^2(r_i) f_j(r_i) = 0$  pour tout  $i \in [j+1, n]$ , ce qui revient à  $P(r_i) = 0$  (les autres facteurs étant strictement positifs). Donc  $P$  possède  $n - j$  racines  $(r_{j+1}, \dots, r_n)$  avec  $\deg(P) < n - j$ , donc  $P = 0$ , ce qui montre la définie-positivité.

On a montré que l'application  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle_j$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_{n-j-1}[X]$ .

### Remarque

Même si elle est bien définie sur  $\mathbb{R}_n[X]^2$ , l'application  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle_j$  n'est pas un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ , c'est une simple forme bilinéaire symétrique.

Dans les questions **8.** à **12.** on fixe  $j \in [0, n-1]$ .

**8. 8a.** On procède par récurrence forte, en orthogonalisant la base monomiale  $(1, X, \dots, X^{n-j-1})$  de  $\mathbb{R}_{n-j-1}[X]$  pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ .

- L'unique polynôme unitaire de degré 0 est  $q_0 = 1$ .
- Soit  $0 \leq k \leq n - j - 2$ .

Supposons construits  $q_0, \dots, q_k$  unitaires, deux à deux orthogonaux pour  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ , et tels que  $\deg(q_i) = i$  pour tout  $0 \leq i \leq k$ . Les polynômes unitaires de degré  $k+1$  sont de la forme  $q_{k+1} = X^{k+1} + \sum_{\ell=0}^k \alpha_\ell q_\ell$  avec les  $\alpha_\ell$  réels (puisque  $(q_0, \dots, q_k)$  est une base de  $\mathbb{R}_k[X]$ ). Un tel polynôme  $q_{k+1}$  est orthogonal à  $q_0, \dots, q_k$  si et seulement si

$$\forall i \in [0, k], \quad \langle q_{k+1}, q_i \rangle_j = 0,$$

ce qui équivaut à

$$\forall i \in [0, k], \quad \langle X^{k+1}, q_i \rangle_j + \alpha_i \langle q_i, q_i \rangle_j = 0,$$

(puisque  $\langle q_\ell, q_i \rangle_j = 0$  pour tout  $0 \leq i \neq \ell \leq k$ ). Puisque les  $q_i$  sont dans  $\mathbb{R}_{n-j-1}[X]$  et que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_{n-j-1}[X]$ , on a par définie-positivité  $\langle q_i, q_i \rangle_j \neq 0$ , et donc les conditions d'orthogonalité précédentes sont équivalentes à

$$\forall i \in [0, k], \quad \alpha_i = -\frac{\langle X^{k+1}, q_i \rangle_j}{\langle q_i, q_i \rangle_j}.$$

Ainsi, le seul polynôme  $q_{k+1}$  qui convient est :

$$q_{k+1} = X^{k+1} - \sum_{i=0}^k \frac{\langle X^{k+1}, q_i \rangle_j}{\langle q_i, q_i \rangle_j} q_i.$$

Ceci prouve l'existence et l'unicité de la famille de polynômes  $(q_0, \dots, q_{n-j-1})$  vérifiant les conditions voulues.

**8b.** On complète la famille précédente en posant

$$q_{n-j} = (X - r_{j+1}) \cdots (X - r_n).$$

Ce polynôme est unitaire, de degré  $n - j$ .

- Montrons que  $q_{n-j}$  est orthogonal à  $(q_0, \dots, q_{n-j-1})$  pour la forme bilinéaire symétrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  (attention, on ne la considère plus comme un produit scalaire ici car  $q_{n-j} \notin \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$ ) : pour tout  $i \in [0, n - j - 1]$ ,

$$\langle q_i, q_{n-j} \rangle_j = \langle q_i, q_{n-j} f_j \rangle,$$

mais  $q_{n-j}f_j = (X-r_{j+1})\cdots(X-r_n)(r_1-X)\cdots(r_j-X) = (-1)^j \prod_{i=1}^n (X-r_i) = \frac{(-1)^j}{\lambda} D$ ,  
donc

$$\langle q_i, q_{n-j} \rangle_j = \frac{(-1)^j}{\lambda} \langle q_i, D \rangle = 0,$$

puisque  $q_i \in \mathbb{R}_{n-j-1}[X] \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$  et  $D \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$  par hypothèse (on parle ici de l'orthogonalité au sens du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et non pas  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ ).

- Montrons que  $q_{n-j}$  est l'unique polynôme unitaire de degré  $n-j$  qui soit orthogonal à  $(q_0, \dots, q_{n-j-1})$  pour la forme bilinéaire symétrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ . Puisque  $(q_0, \dots, q_{n-j-1}, q_{n-j})$  est une base de  $\mathbb{R}_{n-j}[X]$  formée de polynômes unitaires, tout polynôme unitaire de degré  $n-j$  s'écrit :

$$Q = q_{n-j} + \sum_{\ell=0}^{n-j-1} \alpha_\ell q_\ell.$$

On a alors, pour tout  $i \in [0, n-j-1]$  :

$$\langle Q, q_i \rangle_j = \underbrace{\langle q_{n-j}, q_i \rangle_j}_{=0} + \sum_{\ell=0}^{n-j-1} \alpha_\ell \underbrace{\langle q_\ell, q_i \rangle_j}_{=0 \text{ si } \ell \neq i} = \alpha_i \underbrace{\langle q_i, q_i \rangle_j}_{\neq 0}$$

donc  $\langle Q, q_i \rangle_j = 0 \iff \alpha_i = 0$ , ce qui montre que le seul polynôme unitaire de degré  $n-j$  qui vérifie les conditions d'orthogonalité voulues est  $Q = q_{n-j} + \sum_{\ell=0}^{n-j-1} 0q_\ell = q_{n-j}$ .

- 9. 9a.** Soit  $2 \leq i \leq n-j$ . Le polynôme  $q_i - Xq_{i-1}$  est de degré  $\leq i-1$  (vu que les coefficients dominants de  $q_i$  et  $Xq_{i-1}$  sont égaux). Vu que  $(q_0, \dots, q_{i-1})$  forme une base de  $\mathbb{R}_{i-1}[X]$ , il existe des réels  $\beta_0, \dots, \beta_{i-1}$  tels que

$$q_i - Xq_{i-1} = \beta_{i-1}q_{i-1} + \beta_{i-2}q_{i-2} + \cdots + \beta_0q_0.$$

Or, pour tout  $\ell \leq i-1 \leq n-j-1$ , on a par "j-orthogonalité" de  $(q_0, \dots, q_{i-1}, q_i)$  :

$$\langle q_i - Xq_{i-1}, q_\ell \rangle_j = \beta_\ell \underbrace{\langle q_\ell, q_\ell \rangle_j}_{\neq 0},$$

ainsi que

$$\langle q_i - Xq_{i-1}, q_\ell \rangle_j = \underbrace{\langle q_i, q_\ell \rangle_j}_{=0} - \langle Xq_{i-1}, q_\ell \rangle_j = -\langle q_{i-1}, Xq_\ell \rangle_j$$

(la dernière égalité est directe en examinant l'expression intégrale de ce produit scalaire).

De plus, si  $\ell < i-2$ , on a  $\deg(Xq_\ell) < i-1$ , donc  $Xq_\ell$  est combinaison linéaire de  $(q_0, \dots, q_{i-2})$  et donc  $\langle q_{i-1}, Xq_\ell \rangle_j = 0$ . Ainsi  $\forall 0 \leq \ell \leq i-3$ ,  $\beta_\ell = 0$ , ce qui entraîne

$$q_i - Xq_{i-1} = a_i q_{i-1} + b_i q_{i-2},$$

en posant  $a_i = \beta_{i-1}$  et  $b_i = \beta_{i-2}$ .

- 9b.** Par bilinéarité de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  et orthogonalité des  $(q_\ell)_{0 \leq \ell \leq n-j}$ , on obtient à partir de la relation précédente :

$$\underbrace{\langle q_i, q_{i-2} \rangle_j}_{=0} - \langle Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j = a_i \underbrace{\langle q_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j}_{=0} + b_i \langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j,$$

c'est-à-dire

$$b_i \langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j = -\langle Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j.$$

- 9c.** Vu que  $q_{i-2} \in \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$ , on obtient par définie-positivité du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  que  $\langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j > 0$ . En outre :

$$\langle Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j = \langle q_{i-1}, Xq_{i-2} \rangle_j.$$

Or, le polynôme  $Xq_{i-2}$  est unitaire de degré  $i-1$ , donc  $Xq_{i-2} = q_{i-1} + R$  avec  $R \in \text{Vect}(q_0, \dots, q_{i-2})$ , ce qui donne par orthogonalité :

$$\langle Xq_{i-1}, q_{i-2} \rangle_j = \langle q_{i-1}, q_{i-1} \rangle_j + \underbrace{\langle q_{i-1}, R \rangle_j}_{=0} = \langle q_{i-1}, q_{i-1} \rangle_j > 0$$

(puisque  $q_{i-1} \in \mathbb{R}_{n-j-1}$ ). On en déduit finalement  $b_i = -\frac{\langle q_{i-1}, q_{i-1} \rangle_j}{\langle q_{i-2}, q_{i-2} \rangle_j} < 0$ .

- 10. 10a.** Evident :  $q_0 = 1$  possède exactement 0 racines dans  $\mathbb{R}$  et  $q_1$ , qui est unitaire de degré 1, est de la forme  $X + \alpha$  donc possède exactement une racine dans  $\mathbb{R}$  :  $-\alpha$ .
- 10b.** Montrons par récurrence forte que pour tout  $1 \leq i \leq n - j$ , le polynôme  $q_i$  a exactement  $i$  racines réelles simples et qu'entre deux racines consécutives de  $q_i$ , il y a strictement une seule racine de  $q_{i-1}$ .

- **Initialisation** : la propriété est vraie pour  $i = 1$  d'après la question précédente.
- **Hérédité** : supposons le résultat vrai jusqu'à un rang  $i - 1 \in [1, n - j - 1]$ , et montrons-le au rang  $i$ . Par hypothèse de récurrence,  $q_{i-1}$  possède  $i - 1$  racines simples, notées  $y_1 < \dots < y_{i-1}$ , et il y a dans chaque intervalle  $]y_k, y_{k+1}[$  une seule racine de  $q_{i-2}$ , notée  $z_k$ . Les réels  $(z_k)_{1 \leq k \leq i-2}$  sont les seules racines de  $q_{i-2}$  (puisque  $\deg(q_{i-2}) = i - 2$ ), d'où

$$q_{i-2} = (X - z_1) \cdots (X - z_{i-2}) \quad (*),$$

avec

$$y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < \cdots < y_{i-2} < z_{i-2} < y_{i-1}.$$

Cherchons maintenant des racines de  $q_i$  en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.

- \* En évaluant la relation obtenue en **9a.** en les  $y_k$  (qui s'applique car  $2 \leq i \leq n - j$ ), on a

$$\forall k \in [1, i - 1], \quad q_i(y_k) = b_i q_{i-2}(y_k).$$

D'autre part :

$$q_{i-2}(y_k) = (y_k - z_1) \cdots (y_k - z_{k-1})(y_k - z_k)(y_k - z_{k+1}) \cdots (y_k - z_{i-2}),$$

$$q_{i-2}(y_{k+1}) = (y_{k+1} - z_1) \cdots (y_{k+1} - z_k)(y_{k+1} - z_{k+1})(y_{k+1} - z_{k+2}) \cdots (y_{k+1} - z_{i-2})$$

donc  $q_{i-2}(y_k)q_{i-2}(y_{k+1}) < 0$  (compter le nombre de facteurs  $< 0$ ). On en déduit :

$$\forall k \in [1, i - 1], \quad q_i(y_k)q_i(y_{k+1}) = \underbrace{b_i^2}_{>0} q_{i-2}(y_k)q_{i-2}(y_{k+1}) < 0,$$

donc la fonction continue  $q_i$  s'annule en un point  $\xi_k \in ]y_k, y_{k+1}[$ , et ce pour tout  $k \in [1, i - 2]$ . On a ainsi trouvé  $i - 2$  racines distinctes de  $q_i$ , il nous en faut encore deux.

- \* Pour tout  $x \in [y_{i-1}, +\infty[$ ,  $q_{i-2}(x) > 0$  (d'après la factorisation (\*)), donc

$$q_i(y_{i-1}) = b_i q_{i-2}(y_{i-1}) < 0.$$

Puisque  $q_i$  est unitaire,  $q_i \underset{+\infty}{\sim} x^i \underset{+\infty}{\rightarrow} +\infty$  donc le TVI fournit une racine  $\xi_{i-1} > y_{i-1}$  pour  $q_i$ .

- \* Pour tout  $x \in ]-\infty, y_1]$ ,  $q_{i-2}$  est du signe de  $(-1)^{i-2}$  (toujours d'après (\*)), donc  $q_i(y_1) = b_i q_{i-2}(y_1)$  est du signe de  $(-1)^{i-1}$ . Or  $q_i \underset{-\infty}{\sim} x^i$  donc  $q_i$  est du signe de  $(-1)^i$  (l'opposé donc) au voisinage de  $-\infty$ , ce qui donne (toujours par le TVI) l'existence d'une racine  $\xi_0 < y_1$  pour  $q_i$ .

Au total on a trouvé  $i$  racines distinctes  $(\xi_0, \dots, \xi_{i-1})$  pour  $q_i$ , il n'y en a pas d'autres car  $\deg(q_i) = i$  et elles vérifient

$$\xi_0 < y_1 < \xi_1 < y_2 < \cdots < \xi_{i-2} < y_{i-1} < \xi_{i-1}.$$

d'où la propriété d'entrelacement voulue par rapport aux racines de  $q_{i-1}$ .

### Remarque

Cette preuve par récurrence montre également que vu l'entrelacement, les racines des polynômes  $q_0, \dots, q_{n-j-1}$  sont strictement comprises dans l'intervalle délimité par les racines de  $q_{n-j}$ , qui sont connues ( $r_{j+1} > \dots > r_n$ ). Ainsi, les racines de  $(q_0, \dots, q_{n-j})$  sont contenues dans l'intervalle  $[r_n, r_{j+1}] \subset I = [-1, 1]$ .

**10c.** Immédiat d'après ce qui précède :

$$\forall i \in [0, n - j - 1], \quad q_i = (X - \xi_0) \cdots (X - \xi_{i-1}),$$

donc  $q_i(r_{j+1}) = \prod_{k=0}^{i-1} (r_{j+1} - \xi_k) > 0$  (tous les facteurs étant strictement positifs puisque les racines  $\xi_k$  sont dans  $]r_n, r_{j+1}[$ ).

Posons, pour  $0 \leq i \leq n - j - 1$ ,  $\alpha_i = -\frac{q_{i+1}(r_{j+1})}{q_i(r_{j+1})}$ .

Il s'agit de l'unique réel tel que  $r_{j+1}$  soit racine de  $q_{i+1} + \alpha_i q_i$ .

On pose également  $p_i = \frac{q_{i+1} + \alpha_i q_i}{X - r_{j+1}}$ , c'est un polynôme (puisque  $X - r_{j+1}$  divise  $q_{i+1} + \alpha_i q_i$ ) unitaire et de degré  $i$ , il se décompose donc sous la forme :

$$p_i = c_0 q_0 + \cdots + c_i q_i, \quad c_i = 1.$$

**11. 11a.** Pour tout  $0 \leq \ell \leq i$ ,  $X - r_{j+1}$  divise  $q_\ell - q_\ell(r_{j+1})$ , donc  $\frac{q_\ell - q_\ell(r_{j+1})}{X - r_{j+1}}$  est un polynôme, unitaire (si non nul) et de degré  $\ell - 1 < i$ . Il est donc orthogonal à  $\text{Vect}(q_i, q_{i+1})$  par construction de  $(q_0, \dots, q_{n-j})$ , ce qui entraîne :

$$\left\langle q_{i+1} + \alpha_i q_i, \frac{q_\ell - q_\ell(r_{j+1})}{X - r_{j+1}} \right\rangle_j = 0.$$

**11b.** Le résultat précédent se réécrit, pour tout  $0 \leq \ell \leq i$  :

$$0 = \langle p_i, q_\ell - q_\ell(r_{j+1}) \rangle_j = \langle p_i, q_\ell \rangle_j - q_\ell(r_{j+1}) \times \langle p_i, q_0 \rangle_j.$$

En décomposant  $p_i = c_0 q_0 + \cdots + c_i q_i$  et en développant les produits scalaires, on obtient alors par orthogonalité de  $(q_0, \dots, q_i)$  :

$$0 = c_\ell \langle q_\ell, q_\ell \rangle_j - q_\ell(r_{j+1}) \times c_0 \langle q_0, q_0 \rangle_j,$$

ce qui montre

$$\forall 0 \leq \ell \leq i, \quad c_\ell = q_\ell(r_{j+1}) \frac{\langle q_0, q_0 \rangle_j}{\langle q_\ell, q_\ell \rangle_j} c_0,$$

d'où  $c_\ell = \gamma_\ell c_0$  en posant  $\gamma_\ell = q_\ell(r_{j+1}) \frac{\langle q_0, q_0 \rangle_j}{\langle q_\ell, q_\ell \rangle_j} > 0$  (d'après **10c.** et la définie-positivité de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$  sur  $\mathbb{R}_i[X] \subset \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$ ).

Ainsi,  $(c_0, \dots, c_i)$  ont tous le même signe, mais  $c_i = 1$  donc  $c_\ell > 0$  pour tout  $0 \leq \ell \leq i$ .

**12.** Supposons ici que  $0 \leq j \leq n - 2$ . L'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{j+1}$  est donc un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_{n-j}[X]$ . Pour  $0 \leq i \leq n - j - 1$  et  $0 \leq k \leq i - 1$ , calculons :

$$\langle p_i, q_k \rangle_{j+1} = \langle p_i, q_k f_{j+1} \rangle$$

On a  $f_{j+1}(t) = f_j(t) \times (r_{j+1} - t)$  donc

$$\langle p_i, q_k \rangle_{j+1} = \langle p_i(r_{j+1} - t), q_k f_j \rangle = \langle p_i(r_{j+1} - t), q_k \rangle_j.$$

De plus,  $p_i(t) \times (t - r_{j+1}) = q_{i+1}(t) + \alpha_i q_i(t)$  donc

$$\langle p_i, q_k \rangle_{j+1} = -\langle q_{i+1} + \alpha_i q_i, q_k \rangle_j = 0$$

toujours par  $j$ -orthogonalité de  $(q_0, \dots, q_{n-j})$ .

Ainsi,  $p_i$  est orthogonal à  $(q_0, \dots, q_{i-1})$ , donc à  $\mathbb{R}_{i-1}[X]$  pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{j+1}$ .

**13.**

\* \* \*