DS04 du 18/01/2025 (4h)
Sujet A (MPI*)

Le sujet se compose de 3 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

Exercice 1 : Espaces vectoriels d'endomorphismes nilpotents

Dans tout le sujet on considère des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $\nu(u)$ et appelé **nilindice** de u, et l'on remarquera qu'alors $u^k = 0$ pour tout entier $k \geq \nu(u)$. On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$.

Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dit **nilpotent** lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite **stricte** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $T_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Les trois parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres.
La partie I est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents.
Dans la partie II, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien.
Dans la partie III, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (**lemme A**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (**lemme B**).

Partie I : Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$.

1. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Montrer que $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
2. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. On note $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure stricte. Justifier que $\mathcal{N}_{\mathcal{B}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ et que sa dimension vaut $\frac{n(n-1)}{2}$.
3. Soit $\mathcal{B}$ une base de E . Montrer que
$$\{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_B\} = \{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}(E)\} = [\![1, n]\!].$$
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers $p \geq q \geq 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$.
Montrer que la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x), y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y))$ est libre.
5. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$ de nilindice p. Déduire de la question précédente que si $p \geq n-1$ et $p \geq 2$ alors $\mathrm{Im}\, u^{p-1} = \mathrm{Im}\, u \cap \ker u$ et $\mathrm{Im}\, u^{p-1}$ est de dimension 1.

Partie II : Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (-|-))$.
Étant donné $a \in E$ et $x \in E$ on notera $a \otimes x$ l'application de E dans lui même définie par :

$$\forall z \in E,\ (a \otimes x)(z) = (a|z).x$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ est lineaire et constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathcal{L}(E)\ : \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(x)\}$.

7. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\operatorname{Tr}(a \otimes x) = (a|x)$.

Partie III : Deux lemmes.

On considère ici un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n > 0$. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u)$$

appelé **nilindice générique** de $\mathcal{V}$ (cet indice est bien défini grâce à la question 3). On notera que $p \geq 2$.
On introduit le sous-ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ de E formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\operatorname{Im} u^{p-1}$ pour u dans $\mathcal{V}$; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$K(\mathcal{V}) := \operatorname{Vect}(\mathcal{V}^\bullet).$$

Enfin, étant donné $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \,|\, v \in \mathcal{V}\}.$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

Lemme A. *Soit u et v dans $\mathcal{V}$. Alors $\operatorname{Tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k.*

Lemme B. *Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.*

Dans les questions 8 à 11, on se donne deux éléments arbitraires u et v de $\mathcal{V}$.

8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i\ f_i^{(k)}.$$

Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum\limits_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

9. Montrer que $\sum\limits_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

10. Étant donné $k \in \mathbb{N}$, donner une expression simplifiée de $\operatorname{Tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire la validité du lemme A.

11. Soit $y \in E$. Démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. À l'aide d'une relation entre $u(f_1^{(p-1)}(y))$ et $v(u^{p-1}(y))$, en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.

12. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.
Étant donné $y \in K(\mathcal{V})$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

* * *

Exercice 2 : Dérivation de séries de fonctions

Objectifs

Ce problème étudie la dérivation des sommes de séries de fonctions $\sum f_n$

Pour conclure à une formule du type $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(K)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(K)}$ avec K entier supérieur ou égal à 2 , les théorèmes usuels contiennent généralement au moins une hypothèse sur les dérivées intermédiaires $f_n', \ldots, f_n^{(K-1)}$ (par exemple de convergence simple sur tout l'intervalle ou même en un seul point). Le sujet montre que l'on peut affaiblir l'hypothèse de contrôle des dérivées intermédiaires par une hypothèse de convergence de séries numériques de la forme $\sum f_n(x)$ où x parcourt un ensemble fini.

Le sujet est divisé en deux parties :

— la partie I étudie une inégalité, qualifiée d'inégalité d'interpolation, qui permet de contrôler les dérivées intermédiaires d'une fonction de classe $\mathcal{C}^K$;

— la partie II utilise la partie I pour démontrer un résultat de transfert du caractère $\mathcal{C}^K$ à une somme de série de fonctions ;

Notations

— Pour tous entiers i et j vérifiant $i \leqslant j$, la notation $\llbracket i, j \rrbracket$ désigne l'intervalle d'entiers $[i, j] \cap \mathbb{N}$.

— La lettre K désigne systématiquement un entier naturel non nul.

— Le symbole $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $K-1$ à coefficients réels.

— Pour tout intervalle I, on note $\mathcal{C}^K(I)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^K$. Pour tous $f \in \mathcal{C}^K(I)$ et $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k (et donc $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f''$).

— Dans le cas particulier $I = [0,1]$, pour toute fonction bornée $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

I Inégalités d'interpolation des dérivées

Soit K réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ de l'intervalle $[0,1]$. Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant : il existe une constante $C > 0$ (dépendant des réels $x_1, \ldots, x_K$) telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^K([0,1]), \quad \max_{0 \leqslant k \leqslant K-1} \left\| f^{(k)} \right\|_\infty \leqslant \left\| f^{(K)} \right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)| \qquad (I.1)$$

Une inégalité du type précédent est appelée <u>inégalité d'interpolation</u> à l'ordre K.

I.A - Cas particulier $K = 1$

On fixe $x_1 \in [0,1]$ et on étudie une inégalité d'interpolation à l'ordre 1,

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1]), \quad \|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + C\,|f(x_1)| \qquad (I.2)$$

Q 1. Montrer l'inégalité d'interpolation (I.2) avec $C = 1$.

Q 2. Soit $C \in]0,1[$. À l'aide d'un exemple simple de fonction f, montrer que l'inégalité d'interpolation (I.2) est fausse.

I.B - Cas particulier $K = 2$

On fixe deux réels distincts $x_1 < x_2$ de $[0,1]$. On veut construire une constante $C > 0$ telle qu'on ait l'inégalité d'interpolation à l'ordre 2,

$$\forall f \in \mathcal{C}^2([0,1]), \quad \max\left(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\right) \leqslant \|f''\|_\infty + C\left(|f(x_1)| + |f(x_2)|\right) \qquad (I.3)$$

Q 3. Pour tous $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, démontrer l'inégalité

$$\left| f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqslant \|f''\|_\infty$$

Q 4. En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, on a $\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \dfrac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$.

Q 5. Conclure le cas $K = 2$ en montrant l'inégalité d'interpolation (I.3) avec $C = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1}$.

I.C - Cas général par interpolation de Lagrange

On revient à l'étude du cas général d'inégalité d'interpolation à l'ordre K, donnée par (I.1). On fixe $K \in \mathbb{N}^\star$.

Q 6. Démontrer que l'application

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{K-1}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^K \\ P & \mapsto & (P(x_1), \ldots, P(x_K)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Q 7. Montrer qu'il existe K polynômes $L_1, \ldots, L_K$ de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$, le polynôme $P = \sum\limits_{j=1}^{K} f(x_j) L_j$ vérifie

$$\forall \ell \in [\![1, K]\!], \quad P(x_\ell) = f(x_\ell)$$

Dans les deux questions suivantes Q8 et Q9, on fixe $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$ et on note P le polynôme déterminé dans la question Q7.

Q 8. Pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, montrer qu'il existe au moins $K - k$ réels distincts de $[0,1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule.

Q 9. En déduire l'inégalité $\left\| f^{(k)} - P^{(k)} \right\|_\infty \leqslant \left\| f^{(k+1)} - P^{(k+1)} \right\|_\infty$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.

Q 10. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle l'inégalité d'interpolation (I.1) est vérifiée.

II Dérivation $\mathcal{C}^K$ pour les séries de fonctions

II.A - Énoncé général

On se propose maintenant de démontrer le résultat annoncé dans le préambule. Soit $K \in \mathbb{N}^\star$, on considère

— des réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ d'un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$) ;

— une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles et vérifiant les deux hypothèses

(H1) la série de fonctions $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement sur $[a,b]$;

(H2) pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$ la série numérique $\sum f_n(x_\ell)$ est absolument convergente.

Q 11. Dans le cas particulier $[a,b] = [0,1]$, justifier que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,b]$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.

Q 12. Traiter la question précédente dans le cas général d'un segment $[a,b]$ avec $a < b$.

On pourra examiner $f_n \circ \sigma$ où $\sigma : [0,1] \rightarrow [a,b]$ est définie par $\sigma(t) = (1-t)a + tb$ pour tout $t \in [0,1]$.

D'après le résultat de la question précédente, on peut poser $F_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Q 13. Démontrer que F_0 est de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$ et que $F_0^{(k)} = F_k$ pour tout $k \in [\![1, K]\!]$.

II.B - Application sur un exemple

Dans cette sous-partie, on considère un exemple où les dérivées intermédiaires ne s'expriment pas avec les fonctions usuelles.

Q 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, justifier qu'il existe une unique fonction $f_n \in \mathcal{C}^2(\,]0,+\infty[\,)$ vérifiant

$$f_n(1) = 0,\ f_n(2) = 0 \text{ et } f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2} \text{ pour tout } x > 0$$

Q 15. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$ et que la fonction $F : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Q 16. Expliciter $F''(x)$.

Q 17. Montrer que $|F(x)| \leqslant \frac{1}{3}$ pour tout $x \in [1,2]$.

* * *

Exercice 3 : seulement s'il vous reste du temps !

Soit $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $N = UMV$ vérifie :

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!], \qquad i \neq j \implies N_{i,j} = 0.$$