Corrigé du DS03 du 10/10/2026 (4h)
Sujet B (MPI)

* * *

Exercice 1 : Projecteur et symétrie de $\mathbb{R}^3$

1. On a facilement $P = Vect(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (1, 0, -1)$, et $D = Vect(v_3)$ avec $v_3 = (1, 2, 3)$. Donc $\dim(P) + \dim(D) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.
   De plus, on a $P \cap D = \{0\}$ car si $u \in P \cap D$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel $u = \lambda v_3 = \lambda(1, 2, 3)$, et vu que u vérifie l'équation cartésienne de P, à savoir $x + y + z = 0$, on en déduit que $6\lambda = 0$, donc $u = 0$.
   On en déduit que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Par définition du projecteur p, on a $p(u) \in P$ et $u - p(u) \in D$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u - p(u) = \lambda v_3$, c'est-à-dire
   $$p(u) = u - \lambda(1, 2, 3) = (x - \lambda, y - 2\lambda, z - 3\lambda).$$
   De plus, $p(u)$ vérifie l'équation cartésienne de P, donc
   $$(x - \lambda) + (y - 2\lambda) + (z - 3\lambda) = 0,$$
   c'est-à-dire $\lambda = \frac{1}{6}(x + y + z)$. Donc finalement
   $$p(u) = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z).$$
   On en déduit la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$:
   $$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$
3. Puisque (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$ (d'après la question 1.), on a $p(v_1) = v_1$, $p(v_2) = v_2$ et $p(v_3) = 0$, donc
   $$Mat_{(v_1,v_2,v_3)}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   qui est bien une matrice diagonale.
4. Par définition de la symétrie s, on a $s = p - (Id - p) = 2p - Id$, donc la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est
   $$S = 2A - I = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & -4 \\ -6 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

* * *

Exercice 2 : Projecteurs polynomiaux

1. Il est facile de voir que chaque F_i est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1, car les éléments de F_i sont les polynômes de degré $\leq n$ divisibles par $X-j$ pour tout $j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}$, donc pour des raisons de degré :

$$F_i = \{\lambda \prod_{j\in[0,n]\setminus\{i\}} (X-j),\ \lambda \in \mathbb{R}\} = Vect\left(\prod_{j\in[0,n]\setminus\{i\}} (X-j)\right).$$

Montrons que $F_0, \cdots, F_n$ sont en somme directe : si $P_0 + \cdots + P_n = 0$ avec chaque P_i dans chaque F_i, alors en évaluant en $X = j$, on obtient :

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \qquad P_j(j) = 0$$

Ainsi, pour tout j, le polynôme P_j a pour racines tous les entiers de $[\![0,n]\!]$ ($P_j \in F_j$ donc $P_j(i) = 0$ pour $i \in [\![0,n]\!] \setminus \{j\}$, et on vient de montrer qu'en plus $P_j(j) = 0$), c'est-à-dire $n+1$ racines distinctes, alors que $\deg(P_j) \leq n$, donc $P_j = 0$. On a montré que $(P_0 + \cdots + P_n = 0) \implies (P_0 = \cdots = P_n = 0)$, donc $F_0, \cdots, F_n$ sont en somme directe.
Enfin, on a $\sum_{i=0}^{n} \dim(F_i) = n+1 = \dim(E)$, donc $F_0 \oplus \cdots \oplus F_n = E$.

2. Etant donné un polynôme $Q \in E$, déterminons la décomposition de Q sur la somme directe $E = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n$ (qui existe et est unique d'après la question précédente) : notons $Q = Q_0 + \cdots + Q_n$ avec chaque Q_i dans chaque F_i. D'après les calculs de la question précédente, chaque polynôme Q_i est de la forme

$$Q_i = \lambda_i \prod_{j\in[0,n]\setminus\{i\}} (X-j)$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
De plus en évaluant l'égalité $Q = Q_0 + \cdots + Q_n$ en $X = i$, on obtient

$$Q(i) = \sum_{j=0}^{n} Q_j(i) = Q_i(i) = \lambda_i \prod_{j\in[0,n]\setminus\{i\}} (i-j),$$

donc

$$\lambda_i = \frac{Q(i)}{\prod_{j\in[0,n]\setminus\{i\}} (i-j)},$$

et on en déduit pour tout $i \in [\![0,n]\!]$:

$$p_i(Q) = Q_i = Q(i) \times \frac{\prod_{j\in[0,n]\setminus\{i\}} (X-j)}{\prod_{j\in[0,n]\setminus\{i\}} (i-j)}$$

Remarque
On a donc $p_i(Q) = Q(i)L_i$, où L_i est le i^e polynôme interpolateur de Lagrange associé aux points $(0, 1, \cdots, n)$.

* * *

Exercice 3 : Sous-anneaux de $\mathbb{Z}^2$

1. Soit $d \in \mathbb{N}$. Rappelons que $(0,0)$ est l'élément nul de l'anneau produit $\mathbb{Z}^2$ et que $(1,1)$ est son élément unité. Comme $1 \equiv 1\ [d]$, on a $(1,1) \in A_d$.
   Soient (x,y) et (x',y') dans A_d. On a $y \equiv x\ [d]$ et $y' \equiv x'\ [d]$ donc $y - y' \equiv x - x'\ [d]$ c'est-à-dire $(x,y) - (x',y') \in A_d$.
   De plus on sait que $y \equiv x\ [d]$ et $y' \equiv x'\ [d]$ impliquent $yy' \equiv xx'\ [d]$ donc $(xx', yy') = (x,y) \times (x',y') \in A_d$.
   On a ainsi prouvé que A_d est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.
2. (a) Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.
   On a $(0,0) \in A$ donc $0 \in H$.
   Soit $(x,y) \in H^2$. On a donc $(x,0) \in A$ et $(y,0) \in A$. On en déduit $(x,0) - (y,0) \in A$, c'est-à-dire $(x-y,0) \in A$ et donc $x - y \in H$.
   On a donc prouvé que H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

   (b) H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ donc d'après le cours, il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $H = d\mathbb{Z}$.
   Ce d est notre candidat, on veut montrer que $A = A_d$.
   - Soit $(x,y) \in A_d$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + kd$. Ainsi
   $$(x,y) = (y,y) + (kd,0) = y(1,1) + k(d,0)$$
   avec $(d,0) \in A$ car $d \in H$, et bien sûr $(1,1) \in A$, d'où $(x,y) \in A$.
   Ainsi $A_d \subset A$.
   - Soit $(x,y) \in A$. L'idée est de se ramener à un élément de H en "reculant" jusqu'à l'axe des abscisses : puisque $(1,1) \in A$ et $y \in \mathbb{Z}$, on a par stabilité de A
   $$(x,y) - y(1,1) \in A,$$
   c'est-à-dire $(x-y,0) \in A$, donc $x - y \in H = d\mathbb{Z}$, ce qui signifie que $y \equiv x\ [d]$, et donc $(x,y) \in A_d$. Ainsi $A \subset A_d$.

   Et donc $A = A_d$.

* * *

Exercice 4 : Résultant de deux polynômes

1. (a) Soit (A,B), (C,D) deux éléments de E et λ, μ deux nombres complexes. Alors, vu que $\mathbb{C}[X]$ est une algèbre,

$$\begin{aligned} u\big(\lambda(A,B)+\mu(C,D)\big) &= u\big((\lambda A+\mu C,\lambda B+\mu D)\big)\\ &= P(\lambda A+\mu C)+Q(\lambda B+\mu D)\\ &= \lambda(PA+QB)+\mu(PC+QD)\\ &= \lambda u(A,B)+\mu u(C,D)\end{aligned}$$

donc $\boxed{u \text{ est linéaire.}}$

(b) Si u est bijective, le polynôme constant égal à 1 possède un antécédent pour u i.e. il existe $(A,B)\in E\subset\mathbb{C}[X]\times\mathbb{C}[X]$ tel que $1=PA+QB$.
D'après le théorème de Bézout, on en déduit que $\boxed{P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux.}}$

(c) Supposons P et Q premiers entre eux et soit (A,B) appartenant à $Ker(u)$.
Alors $AP=-BQ$ donc P divise BQ et comme P et Q sont premiers entre eux, P divise B d'après le théorème de Gauss ; or $\deg B\leq p-1<\deg P$ donc nécessairement $B=0$. De même, Q divise A et $\deg A<\deg Q$ donc $A=0$. On a donc $\boxed{Ker(u)=\{0_E\}}$, et comme $\dim E=p+q=\dim F$, on en déduit que l'application linéaire $\boxed{u \text{ est bijective.}}$

2. (a) $\boxed{\text{Notons } M \text{ la matrice de } u \text{ par rapport aux bases } \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B}' \text{ et montrons que } M=M_{P,Q}}$ (définie par l'énoncé). Remarquons que ces deux matrices sont carrées d'ordre $p+q$.
Soit $j\in[\![1,q]\!]$, alors $u(X^{j-1},0)=X^{j-1}P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^{j-1+k}$: donc la colonne numéro j de M est

$$(0,\cdots,0,a_0,a_1,\cdots,a_p,0,\cdots,0)^T$$

(colonne commençant par $j-1$ zéros et se terminant par $q-j$ zéros) qui est également la colonne numéro j de $M_{P,Q}$.
De même, si $j\in[\![1,p]\!]$, alors $u(0,X^{j-1})=X^{j-1}Q=\sum_{k=0}^{q}b_kX^{j-1+k}$: donc la colonne numéro $j+q$ de M est

$$(0,\cdots,0,b_0,b_1,\cdots,b_q,0,\cdots,0)^T$$

(colonne commençant par $j-1$ zéros et se terminant par $p-j$ zéros) qui est également la colonne numéro $j+q$ de $M_{P,Q}$.

(b) D'après a), $Res(P,Q)=\det M_{P,Q}=\det u$, donc $Res(P,Q)\neq 0$ si et seulement si u est bijective ce qui, d'après 1. équivaut au fait que P et Q soient premiers entre eux.

3. (a) Rappelons qu'un nombre complexe a est racine multiple de P si et seulement si $P(a)=P'(a)=0$. On en déduit que P admet une racine multiple si et seulement si les polynômes P et P' admettent une racine complexe commune c'est-à-dire ne sont pas premiers entre eux ce qui équivaut d'après la question précédente à $Res(P,P')=0$.

(b) Si $P=X^3+aX+b$, $P'(X)=3X^2+a$ d'où $Res(P,P')=\begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 & 0\\ a & b & 0 & a & 0\\ 0 & a & 3 & 0 & a\\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=27b^2+4a^3$

(*on se ramène au calcul du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs pour le partage 3-2 en effectuant les opérations élémentaires* $L_2\leftarrow L_2-\frac{a}{3}L_4$ *et* $L_3\leftarrow L_3-\frac{a}{3}L_5$)
Donc $\boxed{X^3+aX+b \text{ admet une racine multiple si et seulement si } 4a^3+27b^2=0.}$

4. (a) Pour montrer que P et Q sont premiers entre eux, il suffit d'après 2.b) de vérifier que leur résultant n'est pas nul. Or $Res(P,Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

   (b) Notons u l'application de $\mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_3[X]$ qui à (A,B) associe $PA+QB$ et posons $A_0 = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $B_0 = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$. Alors,

$$PA_0+QB_0 = 1 \iff u(A_0,B_0) = 1 \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   En effectuant les opérations élémentaires suivantes : $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, $L_5 \leftarrow L_5 - L_1 - L_2$, $L_6 \leftarrow L_6 - L_2 - L_3$, $L_7 \leftarrow L_7 - L_3$ on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} a_0 + b_0 = 1 \\ a_1 - b_0 + b_1 = 0 \\ a_2 - b_1 + b_2 = 0 \\ -b_2 + b_3 = -1 \\ -b_3 = -1 \\ b_0 = 0 \\ b_1 - b_2 + b_3 = 0 \end{cases}$$

   qui admet pour unique solution : $(a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2,b_3) = (1,-1,-1,0,1,2,1)$ ce qui fournit la solution $\boxed{(A_0,B_0) = (1 - X - X^2, X + 2X^2 + X^3)}$.

   (c) Dans ces conditions, $PA+QB = 1$ équivaut à $PA+QB = PA_0+QB_0$ ou encore à $P(A-A_0) = Q(B_0-B)$. Donc, si (A,B) est solution, Q divise $P(A-A_0)$ et vu que P et Q sont premiers entre eux, Q divise $A-A_0$ d'après le théorème de Gauss. Il existe donc $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = A_0 + QR$; dans ces conditions $PA+QB = PA_0+QB_0$ équivaut à $PQR + QB = QB_0$ soit compte-tenu de l'intégrité de $\mathbb{C}[X]$ et du fait que $Q \neq 0$ à $B = B_0 - PR$. Les solutions de $PA+QB = 1$ sont donc les couples de la forme $\boxed{(A_0+QR, B_0-PR) \text{ avec } R \in \mathbb{C}[X]}$

5. (a) Si $P(X) = X^3 - 3$ et $Q_y(X) = (y-X)^2 - 7$,

$$Res(P,Q_y) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & y^2-7 & 0 \\ 0 & -3 & -2y & y^2-7 \\ 1 & 0 & 1 & -2y \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{y^4 - 20y^2 + 16}.$$

   (b) Le polynôme P admet pour racines $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$ et Q_y admet pour racines $y+\sqrt{7}$ et $y-\sqrt{7}$, donc P et Q_y admettent une racine commune si et seulement si

$$[\sqrt{3} = y+\sqrt{7} \text{ ou } -\sqrt{3} = y+\sqrt{7} \text{ ou } \sqrt{3} = y-\sqrt{7} \text{ ou } -\sqrt{3} = y-\sqrt{7}]$$

   i.e. si et seulement si $y \in \{\sqrt{3}+\sqrt{7}, \sqrt{3}-\sqrt{7}, -\sqrt{3}+\sqrt{7}, -\sqrt{3}-\sqrt{7}\}$.
   Comme on sait que les polynômes P et Q_y admettent une racine commune si et seulement si leur résultant est nul, on en déduit que le polynôme $\boxed{R(X) = X^4 - 20X^2 + 16}$ admet pour racines $\sqrt{3}+\sqrt{7}, \sqrt{3}-\sqrt{7}, -\sqrt{3}+\sqrt{7}, -\sqrt{3}-\sqrt{7}$. Il est bien de degré 4 et à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

* * *

Exercice 5 : Modules des racines d'une suite de polynômes

1. L'application φ est linéaire (calcul à détailler) et $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$
(car $\deg(P - P') \leq \deg(P) \leq n$) donc $\boxed{\varphi \text{ induit sur } \mathbb{R}_n[X] \text{ un endomorphisme.}}$.

2. On a $\varphi(1) = 1$ et $\forall i \geqslant 1$, $\varphi(X^i) = X^i - iX^{i-1}$. On en déduit la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. De la question 2., on déduit $\det(\varphi_n) = \det(A) = 1 \neq 0$ (le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses éléments diagonaux). $\boxed{\varphi_n \text{ est donc un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

4. φ_n étant une bijection de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$,

$\boxed{\text{il existe une unique famille de polynômes } s_0, s_1, \cdots, s_n \text{ telle que } \forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \dfrac{X^i}{i!}.}$

${\varphi_n}^{-1}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\left(1, \dfrac{X}{1!}, \cdots, \dfrac{X^n}{n!}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc

$\boxed{(s_0, s_1, \cdots, s_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

5. En développant, on trouve $(Id - \delta) \circ (Id + \delta + \cdots + \delta^n) = Id - \delta^{n+1}$, or $\delta^{n+1} = 0$ (dérivée $n+1$ème d'un polynôme de degré $\leqslant n$) et donc $\boxed{(Id - \delta) \circ (Id + \delta + \cdots + \delta^n) = Id.}$

6. La relation précédente peut aussi s'écrire $\varphi_n \circ (Id + \delta + \cdots + \delta^n) = Id$
et donc $\varphi_n^{-1} = Id + \delta + \cdots + \delta^n$.
Pour tout entier i dans $[\![0, n]\!]$, on a donc
$s_i = \varphi_n^{-1}\left(\dfrac{X^i}{i!}\right) = (Id + \delta + \cdots + \delta^n)\left(\dfrac{X^i}{i!}\right) = \dfrac{X^i}{i!} + \dfrac{X^{i-1}}{(i-1)!} + \cdots + \dfrac{X}{1!} + 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} \frac{X^k}{k!}$, c'est-à-dire :

$\boxed{s_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} \frac{X^k}{k!}}$.

7. Soit p un entier naturel non nul, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des nombres complexes de module $\leqslant 1$ et $\theta_1, \ldots, \theta_p$ des nombres réels > 0 tels que $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i\right| = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \theta_i$.

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \theta_i = \left|\sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \theta_i |\alpha_i| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \theta_i$.
   Si l'un des α_i a un module < 1, la dernière inégalité est stricte et on a une contradiction.
   $\boxed{\alpha_1, \ldots, \alpha_p \text{ sont donc des nombres complexes de module exactement 1.}}$

   (b)
   $$\begin{array}{ll} & \left|\theta_1 + \theta_2 e^{it}\right|^2 = (\theta_1 + \theta_2)^2 \\ \Longrightarrow & {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2 + 2\theta_1\theta_2 \cos t = {\theta_1}^2 + {\theta_2}^2 + 2\theta_1\theta_2 \\ \Longrightarrow & \cos t = 1 \quad \text{car } \theta_1\theta_2 > 0 \\ \Longrightarrow & \boxed{\alpha_2 = 1} \end{array}$$

   (c) On procède de la même façon en posant pour tout k, $\alpha_k = e^{it_k}$.

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\theta_k e^{it_k}\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k\right)^2$$

$$\implies \sum_{k=1}^{n}{\theta_k}^2 + \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\theta_k\theta_l e^{it_k}e^{-it_l} + \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\theta_k\theta_l e^{-it_k}e^{it_l} = \sum_{k=1}^{n}{\theta_k}^2 + 2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\theta_k\theta_l$$

$$\implies 2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\theta_k\theta_l\cos(t_k-t_l) = 2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\theta_k\theta_l$$

$$\implies \sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}\theta_k\theta_l(1-\cos(t_k-t_l)) = 0$$

$\implies \forall k,l\in[\![1,n]\!],\quad \cos(t_k-t_l)=1 \quad$ car $\theta_k\theta_l>0$ et $1-\cos(t_k-t_l)\geqslant 0$

$\implies \forall k,l\in[\![1,n]\!],\quad t_k-t_l\in 2\pi\mathbb{Z}$

$\implies \boxed{\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_p}$

8. (a) $P(0)=a_0>0$.

$P(1)=\sum_{k=0}^{n}a_k > a_0 > 0$.

Ni 0, ni 1, ne sont donc racines de P.

(b) On a $(X-1)P(X)=a_nX^{n+1}+(a_{n-1}-a_n)X^n+\cdots+(a_1-a_2)X^2+(a_0-a_1)X-a_0$, mais $a_0=a_1$, donc

$\boxed{(X-1)P(X)=a_nX^{n+1}+(a_{n-1}-a_n)X^n+\cdots+(a_1-a_2)X^2-a_0.}$

(c) Considérons une racine α de P. On suppose $|\alpha|\leqslant 1$.

α est aussi racine de $(X-1)P(X)$, et comme $a_0=a_1$, on a :

$a_n\alpha^{n+1}+(a_{n-1}-a_n)\alpha^n+\cdots+(a_1-a_2)\alpha^2=a_0$

D'autre part, $a_n+(a_{n-1}-a_n)+\cdots+(a_1-a_2)=a_1=a_0$.

On a donc : $a_n\alpha^{n+1}+(a_{n-1}-a_n)\alpha^n+\cdots+(a_1-a_2)\alpha^2=a_n+(a_{n-1}-a_n)+\cdots+(a_1-a_2)$.

On peut donc appliquer la question 7. en posant $\theta_n=a_n$, $\theta_k=a_k-a_{k+1}$ pour $k\in[\![1,n-1]\!]$ et $\alpha_k=a^{k-1}$ pour $k\in[\![1,n]\!]$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ sont des nombres complexes de module $\leqslant 1$ et $\theta_1,\ldots,\theta_n$ des nombres réels >0.

On en déduit $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n$ c'est à dire $\alpha^2=\alpha^3=\cdots\alpha^{n+1}$ ce qui est impossible car $\alpha\neq 0$ et $\alpha\neq 1$.

Les racines complexes de P ont donc un module >1.

9. $Q(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0$ avec $0<a_0<a_1<\cdots a_{n-2}<a_{n-1}=a_n$.

$a_0>0$ donc 0 n'est pas racine de Q.

α est racine de Q si et seulement si $\frac{1}{\alpha}$ est racine du polynôme $a_0X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_{n-1}X+a_n$ qui vérifie les hypothèses de la question 8.

On en déduit $\left|\frac{1}{\alpha}\right|>1$ et donc $|\alpha|<1$

Les racines complexes de Q ont donc un module <1.

10. $T_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}X^k$. Posons $a_k=\frac{n^k}{k!}$ pour $k\in[\![0,n]\!]$.

On a alors $0<a_0<a_1<\cdots a_{n-2}<a_{n-1}=a_n$, donc d'après la question précédente, toutes les racines complexes de T_n ont donc un module <1 et donc

toutes les racines complexes du polynôme S_n ont un module $<n$.

* * *