DS03 du 10/10/2026 (4h)
Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 5 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Projecteur et symétrie de $\mathbb{R}^3$

Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur le plan P parallèlement à la droite D.
   Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.
4. Soit s la symétrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan P et parallèlement à la droite D.
   Déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

* * *

Exercice 2 : Projecteurs polynomiaux

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $E=\mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, on note $F_i=\big\{Q\in E,\ \forall j\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\},\ Q(j)=0\big\}$.

1. Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de E et que $E=F_0\oplus\cdots\oplus F_n$.
2. Pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, on note p_i le projecteur sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i}F_j$.
   Etant donné un polynôme $Q\in E$, déterminer $p_i(Q)$.

* * *

Exercice 3 : Sous-anneaux de $\mathbb{Z}^2$

Pour $d\in\mathbb{N}$, on note $A_d=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2,\ y\equiv x\ [d]\}$.

1. Montrer que, pour tout $d\in\mathbb{N}$, A_d est un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.
2. (a) Réciproquement, soit A un sous-anneau de $\mathbb{Z}^2$.
   Démontrer que $H=\{x\in\mathbb{Z},\ (x,0)\in A\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
   (b) En déduire qu'il existe $d\in\mathbb{N}$ tel que $A=A_d$.

* * *

Exercice 4 : Résultant de deux polynômes

Soient p et q deux entiers naturels non nuls,

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.
Le *résultant* des polynômes P et Q est le nombre complexe noté $\mathrm{Res}(P,Q)$:

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant $q+p$ colonnes, dont les q premières colonnes représentent les coefficients du polynôme P et les p suivantes représentent les coefficients du polynôme Q ; les positions non remplies étant des zéros. Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

La matrice servant à définir $\mathrm{Res}(P,Q)$ pourra être notée $M_{P,Q}$:

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \det(M_{P,Q}).$$

On note $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.
Soit u l'application de E dans F définie pour $(A,B) \in E$ par : $u(A,B) = PA + QB$.

1. **Cas où u est bijective**
   (a) Démontrer que u est une application linéaire.
   (b) Si on suppose que u est bijective, démontrer que P et Q sont premiers entre eux.
   (c) Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et en déduire que u est bijective.

2. **Matrice de u**
   On note $\mathcal{B} = ((1,0),(X,0),\ldots,(X^{q-1},0)(0,1),(0,X),\ldots,(0,X^{p-1}))$ une base de E et $\mathcal{B}' = (1,X,\cdots,X^{p+q-1})$ la base canonique de F.
   (a) Déterminer la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, notée $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$.
   (b) Démontrer que $\mathrm{Res}(P,Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux (donc $\mathrm{Res}(P,Q) = 0$ si et seulement si P et Q ont au moins une racine commune complexe).

3. **Racine multiple**
   (a) Démontrer qu'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\mathrm{Res}(P,P') = 0$.

(b) *Application* : déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients (a, b) pour que le polynôme $X^3 + aX + b$ admette une racine multiple dans $\mathbb{C}$.

4. **Équation de Bézout**
Dans cette question, on note $P = X^4 + X^3 + 1$ et $Q = X^3 - X + 1$.
   (a) Démontrer, en utilisant la première partie, que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.
   (b) On cherche un couple (A_0, B_0) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que : $PA_0 + QB_0 = 1$. Expliquer comment on peut trouver un tel couple en utilisant la matrice de u, puis donner un couple solution.
   (c) Déterminer tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant : $PA + QB = 1$.
   On pourra commencer par remarquer que, si (A, B) est un couple solution, alors $P(A - A_0) = Q(B_0 - B)$.

5. **Un nombre algébrique**
On considère les polynômes :
$$P(X) = X^2 - 3, \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \quad Q_y(X) = (y - X)^2 - 7.$$
   (a) Calculer le résultant $\mathrm{Res}(P, Q_y)$ pour tout réel y.
   (b) En déduire un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$. Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?

* * *

Exercice 5 : Modules des racines d'une suite de polynômes

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Pour tout polynôme P, on note P' son polynôme dérivé.
Étant donné un entier naturel n, $[\![0, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et n.

Partie I

Soit l'application :
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array} \right.$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.

1. Démontrer que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme. On note φ_n cet endomorphisme.
2. Expliciter la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Démontrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, \ldots, s_n$ telle que :
   - $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \dfrac{X^i}{i!}$,
   - $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire
$$\delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right. .$$
   Justifier :
$$(Id - \delta) \circ (Id + \delta + \cdots + \delta^n) = Id.$$

6. En déduire l'expression de s_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0, n]\!]$.

Partie II

Dans la suite, on considère la famille de polynômes $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \cdots \frac{X^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}.$$

On va montrer le résultat suivant : si n est un entier naturel ≥ 2, les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.

7. Soit p un entier naturel non nul. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des nombres complexes de module ≤ 1.
   Soient $\theta_1, \ldots, \theta_p$ des nombres réels > 0. On suppose que $\left|\sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{p} \theta_i$.
   (a) Démontrer que $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des nombres complexes de module exactement 1.
   (b) On suppose dans cette question seulement $p = 2$ et $\alpha_1 = 1$.
   Soit t un nombre réel tel que $\alpha_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. En développant $\left|\theta_1 + \theta_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|^2$, justifier que $\alpha_2 = 1$.
   (c) Dans le cas général, démontrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p$..
8. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. On note $a_0, \ldots, a_n$ ses coefficients :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

   On suppose que $a_0 = a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > 0$.
   (a) Justifier que ni 0 ni 1 ne sont des racines de P.
   (b) Déterminer les coefficients du polynôme $(X-1)P(X)$.
   (c) Démontrer que les racines complexes de P ont un module > 1.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question 7c
9. Soit Q dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. Soient $a_0, \ldots, a_n$ ses coefficients :

$$Q(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

   On suppose que $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$.
   Justifier que les racines complexes de Q ont un module < 1.
10. En conclure que si $n \geq 2$, les racines complexes de S_n sont de module $< n$.
    Indication : utiliser la famille de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n(X) = S_n(nX).$$

* * *