Corrigé du DS03 du 30/11/2024 (4h)
Sujet B (MPI)

* * *

Exercice 1 : Questions de topologie (comportant l'exercice 1 de la banque INP)

1. On obtient facilement par croissance de l'intégrale que

$$\forall f \in E, \qquad \|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty = \|f\|_\infty,$$

mais il n'existe pas de constante $C \geq 0$ telle que

$$\forall f \in E, \qquad \|f\|_\infty \leq C\|f\|_1.$$

En effet, si c'était le cas, on aurait en particulier pour $f = (t \mapsto t^n)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 1 \leq C \int_0^1 t^n = \frac{C}{n+1},$$

ce qui est impossible puisque $\frac{C}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{les normes } \|\ \|_\infty \text{ et } \|\ \|_1 \text{ ne sont pas équivalentes}}$.

2. (a) L'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$ est $\boxed{\text{linéaire}}$

(puisque $u(\lambda f + g) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda u(f) + u(g)$ pour tout $(\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times E \times E$).

De plus, $\forall f \in E$, $|u(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$ donc $\boxed{u \text{ est continue}}$ et $|||u||| = \sup\limits_{f\neq 0} \dfrac{|u(f)|}{\|f\|_\infty} \leq 1$.

Si on choisit f constante égale à 1, on a $f \in E \setminus \{0_E\}$ et $|u(f)| = 1 = \|f\|_\infty$ donc $\boxed{|||u||| = 1}$ (et le sup est atteint).

(b) On a $F = u^{-1}(\{0\})$. Puisque u est continue et que $\{0\}$ est un fermé de $(\mathbb{R}, |\ |)$, on en déduit que $\boxed{F \text{ est un fermé de } (E, \|\ \|_\infty)}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\|f_n - c\|_1 = \int_0^1 |f_n - 1| = \int_0^{1/n} (1 - nx)dx = \frac{1}{2n}.$$

(b) Chaque f_n est dans F (puisque f_n est continue et $f_n(0) = 0$) et $\|f_n - c\|_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc la fonction c est limite d'une suite (f_n) d'éléments de F dans l'evn $(E, \|\ \|_1)$.

Ainsi, $\boxed{c \in \overline{F}}$ (par caractérisation séquentielle de l'adhérence), et $\boxed{F \text{ n'est pas fermé dans } (E, \|\ \|_1)}$ puisque les f_n sont dans F mais pas leur limite c (vu que $c(0) = 1 \neq 0$).

(c) L'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$ $\boxed{\text{n'est pas continue pour la norme } \|\ \|_1}$ car $\{0\}$ est un fermé de $(\mathbb{R}, |\ |)$ alors que $u^{-1}(\{0\}) = F$ n'est pas un fermé de $(E, \|\ \|_1)$.

* * *

Exercice 2 : Questions sur les espaces préhilbertiens (comportant l'exercice 77 de la banque INP)

1. Pour montrer que $\boxed{(A^\perp)^\perp = A}$, voir le cours. L'inclusion $A \subset (A^\perp)^\perp$ est triviale (par définition de l'orthogonalité). Pour l'autre inclusion, on peut soit utiliser l'égalité des dimensions (valable seulement si E est de dimension finie), ou alors utiliser le fait que $E = A \oplus A^\perp$ dès que A est de dimension finie (même si E ne l'est pas), mais c'est un peu plus compliqué dans ce cas.
2. (a) On a $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$ donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F+G)^\perp \subset G^\perp$.
   Ceci montre que $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
   Réciproquement, si $x \in F^\perp \cap G^\perp$, alors x est orthogonal à tout $f \in F$ et tout $g \in G$, donc par bilinéarité du produit scalaire, $(x|f+g) = 0$ pour tout $(f,g) \in F \times G$, ce qui montre que $x \in (F+G)^\perp$.
   Finalement, $\boxed{(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp}$.

   (b) On applique la question précédente avec les SEV $F^\perp$ et $G^\perp$ à la place de F et G :
   $$(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp.$$
   Puisque $(A^\perp)^\perp = A$ pour tout SEV A de E (d'après la question 1.), on en déduit que
   $$(F^\perp + G^\perp)^\perp = F \cap G,$$
   donc en reprenant l'orthogonal :
   $$\boxed{F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp}.$$
3. Notons $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la réflexion d'axe $F : y = 3x$. Puisque $s \in \mathcal{O}^-(\mathbb{R}^2)$ et la base canonique (e_1, e_2) est orthonormée, on en déduit que $S = Mat_{(e_1,e_2)}(s)$ est dans $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$, donc de la forme
   $$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}, \qquad a^2 + b^2 = 1.$$
   De plus $u = (1,3) \in F$ donc $s(u) = u$, ce qui donne les équations
   $$S\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ll} a + 3b & = 1 \\ -3a + b & = 3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} a = & -4/5 \\ b = & 3/5 \end{array} \right. .$$
   Finalement, $\boxed{S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}$.
4. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et p_F la projection orthogonale sur la droite $F = Vect(1,1,1)$. Le vecteur $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ forme une base orthonormée de F, donc on dispose de la formule
   $$\forall u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad p_F(u) = (u|e)e = \frac{1}{3}(x+y+z)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$
   On obtient donc $\boxed{Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(p_F) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

* * *

Exercice 3 : Etude de deux suites récurrentes
Extrait du sujet E3A MP 2013 Math A

1. On a $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ par hypothèse.
   Pour $n \geq 2$, si on suppose $u_0, \cdots, u_{n-1}$ bien définis et strictement positifs, alors le terme $u_n = \frac{2}{u_{n-1}+u_{n-2}}$ est bien défini et strictement positif. Par récurrence forte, on obtient que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et à valeurs dans }]0,+\infty[}$. $\boxed{\text{Idem pour } (v_n)}$.
2. Si (v_n) converge vers ℓ, alors $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ (puisque $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Vu que (v_{n+1}) et (v_{n+2}) convergent aussi vers ℓ et que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+2}\sqrt{v_{n+1}v_n} = 1,$$
   on obtient par produit et composition de limites :
   $$\ell\sqrt{\ell^2} = 1,$$
   donc $\boxed{\text{la seule limite possible de } (v_n) \text{ est } \ell = 1}$ (puisque $\ell \geq 0$ et $\ell = +\infty$ est impossible).
3. (a) En passant au logarithme dans la relation
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_{n+2}\sqrt{v_{n+1}v_n} = 1,$$
   on obtient
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \ln(v_{n+2}) + \frac{1}{2}\ln(v_{n+1}) + \frac{1}{2}\ln(v_n) = 0,$$
   c'est-à-dire
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2w_{n+2} + w_{n+1} + w_n = 0}.$$
   (b) D'après le cours de première année, il suffit de résoudre l'équation caractéristique $2r^2 + r + 1 = 0$ pour déterminer une base de l'espace vectoriel
   $$F = \{w \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ 2w_{n+2} + w_{n+1} + w_n = 0\}.$$
   Puisque $2r^2 + r + 1 = 0 \iff r = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$, on obtient que
   $\boxed{\text{les deux suites } \left(\left(\frac{-1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n, \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n\right) \text{ forment une base de } F}$.
   (c) $\boxed{\text{Toute suite } (x_n) \text{ de } F \text{ converge vers } 0}$ puisque ces suites sont de la forme
   $$x_n = \alpha\lambda^n + \beta\overline{\lambda}^n,$$
   où α et β sont deux constantes complexes et $\lambda = \frac{-1+i\sqrt{7}}{4}$ est de module $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.
4. La suite (w_n) est dans F donc d'après la question précédente, on a $w_n \to 0$, donc par continuité de l'exponentielle, $\boxed{v_n = e^{w_n} \to 1}$, ce qui montre que $\boxed{\text{la série } \sum v_n \text{ diverge grossièrement}}$.
   De plus, $v_n - 1 = e^{w_n} - 1 = w_n + o(w_n) \sim w_n$ et $\sum w_n$ converge absolument puisque $|w_n| = |\alpha\lambda^n + \beta\overline{\lambda}^n| = O(|\lambda|^n)$ avec $|\lambda| < 1$.
   Donc par comparaison de séries à termes positifs, $\boxed{\sum(v_n - 1) \text{ converge absolument, donc converge}}$.
5. (a) La suite (x_n) ne converge pas vers λ, donc on a
   $$non\,(\forall r > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |x_n - \lambda| \leq r)\,,$$
   c'est-à-dire
   $$\boxed{\exists r > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geq N,\ |x_n - \lambda| > r}.$$
   Cela permet de construire par récurrence une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{\varphi(n)} - \lambda| > r$. Cette suite extraite étant bornée (car (x_n) l'est), elle admet elle-même une suite extraite $x_{\varphi(\psi(n))}$ convergente vers un réel λ', qui est différent de λ car $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{\varphi(\psi(n))} - \lambda| > r$ donc en passant à la limite, $|\lambda' - \lambda| \geq r > 0$.
   Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ possède une valeur d'adhérence } \lambda' \neq \lambda}$.

(b) Si (x_n) est bornée et possède une seule valeur d'adhérence, alors la divergence de (x_n) impliquerait l'existence d'au moins deux valeurs d'adhérence d'après la question précédente, ce qui est contradictoire. Donc $\boxed{(x_n) \text{ est convergente}}$.

(c) Si (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors toute suite extraite de (x_n) converge aussi vers ℓ, donc ℓ est la seule valeur d'adhérence de (x_n), ce qui implique que $\ell_- = \ell_+ = \ell$.
Réciproquement : si $\ell_- = \ell_+$, alors (x_n) possède une seule valeur d'adhérence, et elle est bornée par hypothèse, donc convergente d'après la question précédente.
On conclut que $\boxed{\text{pour toute suite } (x_n) \text{ bornée, } (x_n) \text{ converge ssi } \ell_- = \ell_+}$.

6. (a) Montrons par récurrence forte que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha}}$.

- C'est vrai pour $n = 0$ car $\alpha = \min\{u_0, u_1, \frac{1}{u_0}, \frac{1}{u_1}\}$ vérifie notamment $\alpha \leq u_0$ et $\alpha \leq \frac{1}{u_0}$.
- C'est vrai pour $n = 1$ car $\alpha \leq u_1$ et $\alpha \leq \frac{1}{u_1}$.
- Soit $n \geq 2$. Si $\alpha \leq u_k \leq \frac{1}{\alpha}$ pour tout $k < n$, alors $2\alpha \leq u_{n-1} + u_{n-2} \leq \frac{2}{\alpha}$ donc

$$u_n = \frac{2}{u_{n-1} + u_{n-2}} \in [\alpha, \frac{1}{\alpha}].$$

(b) Le réel ℓ_- est une valeur d'adhérence de (u_n) dont il existe une suite extraite $(u_{\psi(n)})$ qui converge vers ℓ_-. En posant $\gamma(n) = \psi(n+2) - 2$, on a bien $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante (puisque $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\psi(n+2) \geq n+2 \geq 2$) et $u_{\gamma(n)+2} = u_{\psi(n+2)} \to \ell_-$.
Par ailleurs, la suite $(u_{\gamma(n)})$ est bornée donc possède une suite extraite $(u_{\gamma(\varphi_1(n))})$ qui converge vers un réel λ_1.
De même, la suite $(u_{\gamma(\varphi_1(n))+1})$ est bornée donc possède une suite extraite $(u_{\gamma(\varphi_1(\varphi_2(n)))+1})$ qui converge vers λ_2.
Il ne reste plus qu'à poser $\varphi = \gamma \circ \varphi_1 \circ \varphi_2$ pour obtenir le résultat : on a bien $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et

$$\boxed{u_{\varphi(n)} = u_{\gamma(\varphi_1(\varphi_2(n)))} \to \lambda_1},$$

$$\boxed{u_{\varphi(n)+1} = u_{\gamma(\varphi_1(\varphi_2(n)))+1} \to \lambda_2},$$

$$\boxed{u_{\varphi(n)+2} = u_{\gamma(\varphi_1(\varphi_2(n)))+2} \to \ell_-}$$

(on a reproduit ici la technique d'extraction commune vue en cours pour démontrer qu'un produit fini de compacts est compact).
On a en outre $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)+1})u_{\varphi(n)+2} = 2$ donc en passant à la limite, on obtient $(\lambda_1 + \lambda_2)\ell_- = 2$. Enfin, λ_1 et λ_2 étant des valeurs d'adhérence, elles sont inférieures à ℓ_+, donc puisque $\ell_- \geq \alpha > 0$, on obtient l'inégalité $2 \leq 2\ell_+\ell_-$, soit $\boxed{\ell_-\ell_+ \geq 1}$.

(c) On peut de même obtenir une suite extraite $u_{\varphi'(n)}$ telle que

$$u_{\varphi'(n)} \to \lambda_1', \quad u_{\varphi'(n)+1} \to \lambda_2', \quad u_{\varphi'(n)+2} \to \ell_+,$$

et dans ce cas, on obtient après passage à la limite dans la relation précédente :

$$(\lambda_1' + \lambda_2')\ell_+ = 2,$$

et donc puisque $\lambda_1', \lambda_2' \geq \ell_-$ et $\ell_+ > 0$, on déduit $2 \geq 2\ell_-\ell_+$, soit $\boxed{\ell_-\ell_+ \leq 1}$.
On a finalement montré $\boxed{\ell_-\ell_+ = 1}$.

(d) De même que précédemment, on peut construire une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ telle que

$$u_{\varphi(n)} \to \lambda_1, \quad u_{\varphi(n)+1} \to \lambda_2, \quad u_{\varphi(n)+2} \to \lambda_3, \quad u_{\varphi(n)+3} \to \ell_-.$$

En passant à la limite dans les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)+1})u_{\varphi(n)+2} = 2, \quad (u_{\varphi(n)+1} + u_{\varphi(n)+2})u_{\varphi(n)+3} = 2,$$

on obtient
$$(\lambda_1+\lambda_2)\lambda_3 = 2 = (\lambda_2+\lambda_3)\ell_-,$$
avec $0<\alpha\leq \ell^- \leq \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \leq \ell_+$ et $\ell_+ = \frac{1}{\ell_-}$, donc
$$\lambda_2+\lambda_3 = \frac{2}{\ell_-} = 2\ell_+,$$
ce qui entraîne $\lambda_2=\lambda_3=\ell_+$ (puisque tous deux inférieurs ou égaux à ℓ_+).
Ensuite,
$$\lambda_1+\lambda_2 = \frac{2}{\lambda_3} = \frac{2}{\ell_+} = 2\ell_-,$$
donc $\lambda_1=\lambda_2=\ell_-$ (puisque tous deux supérieurs ou égaux à ℓ_-).
Finalement, $\boxed{\ell_+=\lambda_2=\ell_-}$.

(e) La suite (u_n) est bornée et $\ell_-=\ell_+$ donc d'après 5.(c), $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ell=\ell_-=\ell_+}$.
De plus, d'après les relations précédemment obtenues, $\ell^2=1$ et $\ell>0$ donc $\boxed{\ell=1}$.

* * *

Exercice 4 : Etude de normes matricielles Extrait du sujet E3A MP 2013 Math A

1. Pour A,B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et X,Y dans $\mathbb{C}^n$, on a :
$$\|BX\|_\infty \leq |\!|\!|B|\!|\!|_\infty \|X\|_\infty, \qquad \|AY\|_\infty \leq |\!|\!|A|\!|\!|_\infty \|Y\|_\infty,$$
donc avec $Y=BX$:
$$\|(AB)X\|_\infty = \|A(BX)\|_\infty \leq |\!|\!|A|\!|\!|_\infty \|BX\|_\infty \leq |\!|\!|A|\!|\!|_\infty |\!|\!|B|\!|\!|_\infty \|X\|_\infty,$$
ce qui prouve que $\boxed{|\!|\!|AB|\!|\!|_\infty = \sup_{X\neq 0} \frac{\|(AB)X\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leq |\!|\!|A|\!|\!|_\infty |\!|\!|B|\!|\!|_\infty}$.

2. (a) On a $DZ = \begin{pmatrix} m_{1,1}z_1 \\ m_{2,2}z_2 \\ \vdots \\ m_{n,n}z_n \end{pmatrix}$ donc $\|DZ\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |m_{i,i}z_i| \leq m \max_{1\leq i\leq n}|z_i| = m\|Z\|_\infty$.
$\boxed{\|DZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty}$.

(b) Si $\|Z\|_\infty \leq 1$, alors on a $\|DZ\|_\infty \leq m$ d'où $|||D|||_\infty = \sup_{X\in\mathbb{C}^n, \|X\|_\infty\leq 1} \|DX\|_\infty \leq m$.
De plus, il existe un entier $j\in\{1,\cdots,n\}$ tel que $m=|m_{j,j}|$. En prenant $z_j=1$ et pour $k\neq j$, $z_k=0$ et $Z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, on a $\|DZ\|_\infty = m$ et $\|Z\|_\infty = 1$ d'où $|||D|||_\infty \geq m$.
Finalement $\boxed{|||D|||_\infty = m}$.

3. (a) $N_P(X) = \|PX\|_\infty$.
Si P n'est pas inversible, en prenant $X\in \ker P$ non nul, on a $N_P(X)=0$ et $X\neq 0$ donc N_P n'est pas une norme.
Si P est inversible, alors
— N_P est une application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}^+$
— $\forall X\in\mathbb{C}^n$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $N_P(\lambda X) = \|\lambda PX\|_\infty = |\lambda|\|PX\|_\infty = |\lambda| N_P(X)$.
— $\forall (X,Y)\in(\mathbb{C}^n)^2$, $N_P(X+Y) = \|P(X+Y)\|_\infty = \|PX+PY\|_\infty \leq \|PX\|_\infty + \|PY\|_\infty = N_P(X)+N_P(Y)$.

— $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $N_P(X) = 0 \Rightarrow \|PX\|_\infty = 0 \Rightarrow PX = 0 \Rightarrow X = 0$ (car $\|.\|_\infty$ est une norme et P est inversible).

donc N_P est une norme.

Finalement, $\boxed{N_P \text{ est une norme si et seulement si } P \text{ est une matrice inversible}}$.

(b) Par définition :

$$|||A|||_P = \sup_{X\in\mathbb{C}^n, \|X\|_P\leq 1} \|AX\|_P = \sup_{X\in\mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty\leq 1} \|PAX\|_\infty = \sup_{X\in\mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty\leq 1} \|PAP^{-1}(PX)\|_\infty.$$

Or P est inversible, donc $X \mapsto PX$ est une bijection de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}^n$ donc

$$\sup_{X\in\mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty\leq 1} \|PAP^{-1}(PX)\|_\infty = \sup_{Y\in\mathbb{C}^n, \|Y\|_\infty\leq 1} \|PAP^{-1}Y\|_\infty = |||PAP^{-1}|||_\infty,$$

On a donc bien $\boxed{|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty}$.

4. (a) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Etant semblables, les matrices A et PAP^{-1} ont le même spectre et donc $\boxed{\rho(A) = \rho(PAP^{-1})}$.

(b) On fixe $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \operatorname{sp}(A)$ et $X \neq 0$ un vecteur propre associé. On a $AX = \lambda X$, donc en passant à la norme $\| \ \|_P$:

$$\|AX\|_P = \|\lambda X\|_P = |\lambda|\|X\|_P,$$

et on déduit :

$$|\lambda| = \frac{\|AX\|_P}{\|X\|_P} \leq \sup_{Y\neq 0} \frac{\|AY\|_P}{\|Y\|_P} = |||A|||_P.$$

Ceci étant valable pour toute valeur propre λ, on conclut $\boxed{\rho(A) \leq |||A|||_P}$.

(c) On suppose A diagonalisable. Il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = PAP^{-1}$.

Attention, il s'agit de la convention inverse de la convention habituelle, c'est-à-dire que l'on a échangé les rôles de P et P^{-1} (pour coller aux formules de l'énoncé) !

D'après 3.(b), $|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty = |||D|||_\infty$, d'après 2.(b), $|||D|||_\infty = \rho(D)$ et comme A et D sont semblables, $\rho(D) = \rho(A)$.

$\boxed{\text{Il existe donc } P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ tel que } |||A|||_P = \rho(A)}$.

(d) Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On trouve facilement $\chi_A(X) = X^3 - 1$, les valeurs propres de A sont 1, j et j^2 donc $\boxed{\rho(A) = 1}$.

Des vecteurs propres associés à 1, j et j^2 sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$.

Si $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$, alors $D = PAP^{-1}$ et d'après 4.(c) $\boxed{|||A|||_P = \rho(A)}$.

Attention, comme dit précédemment, la matrice P^{-1} s'obtient "comme la matrice de passage P habituelle", c'est la matrice qui exprime les vecteurs propres en fonction de la base canonique.

En aucun cas, on ne calcule un inverse de matrice ! C'est pourquoi l'énoncé demande P^{-1} et pas P.

(e) Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

A est de rang 1 et E_0 a pour équation $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$.

Une base de E_0 est : $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \right)$.

D'autre part, $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

A est donc diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres est n)

Si $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}$,

alors $D = PAP^{-1}$ et toujours d'après 4.(c) $\boxed{|||A|||_P = \rho(A)}$.

5. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. On a

$$\|AZ\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max(|az_1 + bz_2|, |cz_1 + dz_2|)$$

$$\leq \max(|az_1| + |bz_2|, |cz_1| + |dz_2|) \leq \max(|a| + |b|, |c| + |d|) \max(|z_1|, |z_2|) = m\|Z\|_\infty.$$

On a donc $\boxed{\|AZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty}$.

On en déduit $|||A|||_\infty \leq m$.

Si on suppose que $m = |a| + |b|$, alors on choisit z_1 et z_2 de module 1 tels que $|a| = az_1$ et $|b| = bz_2$ (toujours possible). On a alors

$$\|AZ\|_\infty = \max(|az_1 + bz_2|, |cz_1 + dz_2|) = \max(m, |cz_1 + dz_2|) = m, \qquad \|Z\|_\infty = 1.$$

De même si $m = |c| + |d|$.

On en déduit $|||A|||_\infty \geq m$.

On a donc $\boxed{|||A|||_\infty = m}$.

(b) i. $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, non diagonalisable.

On travaille dans $\mathbb{C}$, donc $\mathrm{sp}\,(A) \neq \emptyset$.

Si $\mathrm{sp}\,(A)$ possèdait deux éléments, alors le polynôme caractéristique de A serait scindé à racines simples et A serait diagonalisable, donc $\boxed{\mathrm{sp}\,(A) \text{ ne contient qu'un élément}}$.

ii. On choisit une base $e = (e_1, e_2)$ de E, avec e_1 un vecteur propre de f associé à la valeur propre α.

La matrice dans la base e de f est alors triangulaire supérieure, avec les valeurs propres sur la diagonale. Elle est donc de la forme $\boxed{Mat_e(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}$.

iii. β est non nul car A n'est pas diagonalisable.
Posons $e'_1 = \frac{\beta}{\varepsilon} e_1$ et $e'_2 = e_2$.
$e' = (e'_1, e'_2)$ est une base de $\mathbb{C}^2$, $f(e'_1) = \alpha e'_1$, $f(e'_2) = f(e_2) = \beta e_1 + \alpha e_2 = \varepsilon e'_1 + \alpha e'_2$.
On a donc $Mat_{e'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \varepsilon \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Il existe donc une base } e' \text{ de } \mathbb{C}^2 \text{ telle que } Mat_{e'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ où } |\beta'| \leq \varepsilon}$.

iv. Notons $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $T = PAP^{-1}$.
On a alors $|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty = |||T|||_\infty = |\alpha| + |\beta'| \leq |\alpha| + \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon$.
$\boxed{\text{Il existe donc une matrice } P \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ telle que } |||A|||_P \leq \rho(A) + \varepsilon}$.

(c) D'après 4.(b), on a

$$\forall P \in GL_2(\mathbb{C}), \quad |||A|||_P \geq \rho(A),$$

donc $\rho(A)$ est un minorant de l'ensemble $\{|||A|||_P,\ P \in GL_2(\mathbb{C})\}$.
Si A est diagonalisable, alors ce minorant est atteint (cf. 4.(c)), c'est donc la borne inférieure du dit ensemble.
Si A n'est pas diagonalisable, alors d'après 5.(b) iv., on a pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$\exists P \in GL_2(\mathbb{C}) \quad |||A|||_P \leq \rho(A) + \varepsilon/2 < \rho(A) + \varepsilon,$$

donc $\rho(A) + \varepsilon$ ne minore pas l'ensemble en question, ce qui est la caractérisation de la borne inférieure.
Finalement, on a dans tous les cas $\boxed{\inf_{P \in GL_2(\mathbb{C})} |||A|||_P = \rho(A)}$.

(d) Considérons $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. On a

$$\boxed{|||A|||_\infty = \max(|-3| + |8|, |-2| + |5|) = 11}.$$

On a $\chi_A(X) = (X-1)^2$ et $\dim(E_1(A)) = 1$ donc A est non diagonalisable et $\mathrm{sp}\,(A) = \{1\}$.
On a donc $\rho(A) = 1$ et d'après 5.(b) iii., A est semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $|\beta'| \leq 1$. Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $T = PAP^{-1}$. D'où :

$$|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty = |||T|||_\infty = 1 + |\beta'| \leq 2.$$

$\boxed{\text{Il existe donc une matrice } P \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ telle que } |||A|||_P \leq 2}$.

(e) Supposons $\rho(A) < 1$.
On utilise la question 5.(c) avec $\varepsilon = \dfrac{1 - \rho(A)}{2} > 0$. Par définition de l'inf, il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que

$$\boxed{|||A|||_P \leq \rho(A) + \varepsilon = \frac{1 + \rho(A)}{2} < 1}.$$

Or, on sait que la norme subordonnée $|||\ |||_P$ est sous-multiplicative, donc

$$|||A^n|||_P \leq |||A|||_P^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre que $\boxed{\text{la suite } (A^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}}$.
Ici, on a donc du choisir "la bonne norme" pour pourvoir montrer la convergence vers 0. Bien sûr, la suite (A^n) converge vers 0 pour toute norme sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, puisqu'elles sont équivalentes, mais la norme $|||\ |||_P$ précédemment choisie est la mieux adaptée pour faire le calcul.

* * *