Corrigé du DS03 du 22/11/2023 (2h)
Sujet B (MPI)

Exercice 2

1. (a) Soit $y \in \{a\} + \Omega$. Il s'écrit $y = a + x$ avec $x \in \Omega$. Puisque Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$. Cela entraîne que $B(y, r) \subset \{a\} + \Omega$, car pour tout $z \in E$:

$$z \in B(y,r) \iff \|z-y\| < r \iff \|(z-a)-x\| < r \iff z-a \in B(x,r) \implies z-a \in \Omega,$$

donc

$$z \in B(y,r) \implies z \in \{a\} + \Omega.$$

Ainsi, l'ensemble $\{a\} + \Omega$ est voisinage de tous ses points y, donc il s'agit d'un ouvert de E.

(b) Une partie A est toujours réunion de ses singletons, donc on a

$$A + \Omega = \{a + x,\ a \in A, x \in \Omega\} = \bigcup_{a \in A} \{a + x, x \in \Omega\} = \bigcup_{a \in A} (\{a\} + \Omega).$$

D'après la question précédente, on a donc $A+\Omega$ qui est une réunion (éventuellement infinie) d'ouverts, donc c'est un ouvert de E.

2. Les éléments de $\overline{A \times B}$ sont les couples $(x, y) \in E \times F$ pour lesquels il existe une suite $(x_n, y_n) \in (A \times B)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers (x, y). Or, on a

$$(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (x,y) \text{ dans } E \times F \iff \begin{cases} x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \text{ dans } E \\ y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y \text{ dans } F \end{cases},$$

donc les éléments de $\overline{A \times B}$ sont les couples $(x, y) \in E \times F$ tels que x est limite d'une suite de $A^{\mathbb{N}}$ et y est limite d'une suite de $B^{\mathbb{N}}$. D'où l'équivalence :

$$(x,y) \in \overline{A \times B} \iff \begin{cases} x \in \overline{A} \\ y \in \overline{B} \end{cases} \iff (x,y) \in \overline{A} \times \overline{B},$$

ce qui prouve l'égalité ensembliste $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

* * *

Exercice 3

1. Pour tout $f \in E$, on a

$$\forall x \in [0,1], \quad |u(f)(x)| = |f(x) - f(0)| \leq |f(x)| + |f(0)| \leq 2\|f\|_\infty,$$

donc $\|u(f)\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$.
Cette inégalité linéaire montre que l'endomorphisme u est continu pour la norme $\|.\|_\infty$, et que $|\!|\!|u|\!|\!|_\infty \leq 2$.
De plus, la fonction $f : x \mapsto 1 - 2x \in E$ réalise l'égalité puisqu'elle décroît de $f(0) = 1$ à $f(1) = -1$, donc

$$\|f\|_\infty = |f(0)| = |f(1)| = 1, \qquad \|u(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |-2x| = 2 = 2\|f\|_\infty.$$

On a donc finalement $|\!|\!|u|\!|\!|_\infty = 2$.

2. Pour tout $f \in E$, on a

$$\|u(f)\|_1 = \int_0^1 |f(x) - f(0)|dx \leq \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |f(0)|dx = \|f\|_1 + |f(0)|,$$

mais a priori, il ne semble pas possible de majorer $|f(0)|$ à l'aide de $\|f\|_1$ (même si la valeur $|f(0)|$ est grande, l'aire sous la courbe de $|f|$ ne l'est pas forcément).
On va donc montrer que u n'est pas continue. Supposons qu'il existe une constante réelle $C > 0$ telle que

$$\forall f \in E, \qquad \|u(f)\|_1 \leq C\|f\|_1.$$

Appliquons ceci à la suite de fonctions affines par morceaux suivante, construite de sorte à avoir $|f_n(0)|$ indépendant de n mais $\|f_n\|_1 \to 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1], \qquad f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n \in E$, $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}$ et $\|u(f_n)\|_1 = 1 - \frac{1}{2n}$, l'inégalité supposée donne donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 1 - \frac{1}{2n} \leq \frac{C}{2n},$$

ce qui amène une absurdité en faisant tendre $n \to +\infty$.
En conclusion l'endomorphisme u n'est pas continu pour la norme $\|.\|_1$.

* * *

Exercice 4

Corrigé inspiré de celui de François Calio.

1. La suite $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels indexée par $\mathbb{Z}$ telle que les sous-suites $\left(\frac{1}{\operatorname{ch} n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(-n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Par ailleurs ce n'est pas une suite constante. On a bien trouvé une suite non constante élément de $\mathscr{C}$
2. — $\mathscr{C}$ est une partie non vide de E (contient la suite précédente).
   — Soit $(x,x') \in \mathscr{C}^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On pose $y = \alpha x + \beta x'$ et on note x_n, x'_n, y_n les termes généraux des suites x, x', y'.
   On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, y_n = \alpha x_n + \beta x'_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = \alpha x_n + \beta x'_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, y_{-n} = \alpha x_{-n} + \beta x'_{-n}$.
   Comme les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Comme les suites $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(x'_{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, il en est de même pour $(y_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$.
   Ainsi $y \in \mathscr{C}$. Et donc $\mathscr{C}$ est stable par combinaison linéaire.

   Donc par caractérisation des sous-espaces vectoriels, $\boxed{\mathscr{C} \text{ est un sous-espace de } E}$
3. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{C}$.
   La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq A$.
   De même, la suite $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée : il existe $B > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |x_{-n}| \leq B$.
   On pose alors $C = \max(A,B)$, et on a : $\forall n \in \mathbb{Z}, |x_n| \leq C$: la suite x est bornée.
   Ainsi $\boxed{\text{toute suite dans } \mathscr{C} \text{ est bornée}}$
4. Tout d'abord $\boxed{S \text{ est bien définie de } \mathscr{C} \text{ dans } \mathscr{C}}$ puisque pour tout $x \in \mathscr{C}$, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, donc $(S(x)_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S(x)_{-n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)$ convergent, ce qui montre que $S(x) \in \mathscr{C}$.
   Montrons ensuite que $\boxed{S \text{ est linéaire}}$. Soit $(\lambda, x, x') \in \mathbb{R} \times \mathscr{C}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

   $$S(\lambda x + x')_n = (\lambda x + x')_{-n} = \lambda x_{-n} + x'_{-n} = \lambda S(x)_n + S(x')_n,$$

   donc $S(\lambda x + x') = \lambda S(x) + S(x')$.
   Ainsi S est bien une application linéaire de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}$ i.e. $\boxed{S \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{C}}$
5. — <u>Méthode 1</u>. On a clairement $S \circ S = \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$. Donc comme l'énoncé nous dit que S est un endomorphisme de $\mathscr{C}$, on en déduit que S est une symétrie de $\mathscr{C}$ et donc son axe, $\ker(S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$, et sa direction, $\ker(S + \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$, sont supplémentaires dans $\mathscr{C}$.
   Or on a tout aussi clairement $F = \{x \in \mathscr{C}; \forall n \in \mathbb{Z}, x_n = x_{-n}\} = \{x \in \mathscr{C}; S(x) = x\} = \ker(S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ et $G = \ker(S + \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$, donc $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont deux sous-espaces supplémentaires dans } \mathscr{C}}$

— Méthode 2. On a $F = \ker(S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ et $G = \ker(S + \mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ donc ce sont des sous-espaces de $\mathscr{C}$, propres pour l'endomorphisme S, associés à des valeurs propres différentes : 1 et -1. Donc F et G sont en somme directe i.e. $F + G = F \oplus G$.
De plus, si $x \in \mathscr{C}$, $x' = \frac{1}{2}(x + S(x))$ et $x'' = \frac{1}{2}(x - S(x))$, on montre aisément $x = x' + x''$, $x' \in F$ et $x'' \in G$, donc tout élément de S s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. Donc comme ce sont des sous-espaces de $\mathscr{C}$, on a $\mathscr{C} = F + G$.
Ainsi par caractérisation des sous-espaces supplémentaires, $\boxed{F \text{ et } G \text{ sont supplémentaires dans } \mathscr{C}}$

6. En reprenant ce qui a été fait dans la méthode 1 dans la question précédente, on a :
$\boxed{S \text{ symétrie d'axe } F \text{ et de direction } G}$

7. .
   (a) Soit $x \in \mathscr{C}$. D'après la question 2, on sait que x est bornée, donc il existe $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, |x_n| \leq A$. Ainsi, si on pose $u_n = \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{2A}{2^n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Ainsi $\sum u_n$ converge i.e. $\boxed{N(x) \text{ est bien définie}}$.

   (b) — N est bien une application de $\mathscr{C}$ vers $\mathbb{R}^+$
   — Séparation. Soit $x \in \mathscr{C}$ telle que $N(x) = 0$. On note $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $u_n = \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$. On a $N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$ alors que $\sum u_n$ est une série convergente de réels positifs. Donc comme la somme est nulle, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n = 0$ i.e. x est la suite nulle.
   — Homogénéité. Soit $x \in \mathscr{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $y = \lambda x$, $u_n = \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$ et $v_n = \frac{|y_n| + |y_{-n}|}{2^n}$ en notant les termes généraux de x et de y sous la forme x_n et y_n. On a :
   $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{|\lambda x_n| + |\lambda x_{-n}|}{2^n} = |\lambda| \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n} = |u_n|$. Ainsi par linéarité du passage à la somme pour les séries convergentes, $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ i.e. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
   — Inégalité triangulaire. Soit $(x, y) \in \mathscr{C}^2$. Soit $z = x + y$. On note x_n, y_n, z_n les termes généraux de ces suites. On a : $\forall n \in \mathbb{Z}, |z_n| = |x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$.
   Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{|z_n| + |z_{-n}|}{2^n} \leq \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n} + \frac{|y_n| + |y_{-n}|}{2^n}$.
   Donc en passant à la somme, on obtient $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

   Ainsi $\boxed{N \text{ est une norme sur } \mathscr{C}}$

   (c) Soit $x \in \mathscr{C}$ et $x' = S(x)$. On note $u_n = \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$ et $v_n = \frac{|x'_n| + |x'_{-n}|}{2^n}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$ donc $N(x') = N(x)$.
   Ainsi S conserve la norme N i.e. $\boxed{S \text{ est une isométrie de l'espace vectoriel normé } (\mathscr{C}, N)}$.
   En prenant $k = 1$, on a établi : $\forall x \in \mathscr{C}, N(S(x)) \leq kN(x)$. Ainsi par caractérisation de la continuité des applications linéaires, $\boxed{S \text{ est un endomorphisme continu de } (\mathscr{C}, N)}$.

   (d) $\mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ est également une application continue de $(\mathscr{C}, N)$ vers lui-même, donc $R = S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$ est continue sur $(\mathscr{C}, N)$. Donc $F = \ker(S - \mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = R^{-1}(\{0_{\mathscr{C}}\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue donc $\boxed{F \text{ est une partie fermé de l'espace vectoriel normé } (\mathscr{C}, N)}$.
   De même $\boxed{G \text{ est une partie fermé de l'espace vectoriel normé } (\mathscr{C}, N)}$ car $G = (S + \mathrm{id}_{\mathscr{C}})^{-1}(\{0_{\mathscr{C}}\})$.

   (e) On considère la suite $\left(x^{(P)}\right)_{P\in\mathbb{N}^*}$ la suite d'éléments de $\mathscr{C}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{Z}, x_n^{(P)} = 2^n$ si $n \in [\![1, P]\!]$, $x_n^{(P)} = 0$ sinon. Les suites $x^{(P)}$ sont bien dans $\mathscr{C}$ et on a $N\left(x^{(P)}\right) = \sum_{n=1}^{P} 1 = P$ et $\left\|x^{(P)}\right\|_\infty = 2^P$. Comme la suite $\left(\frac{2^P}{P}\right)_{P\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{\left\|x^{(P)}\right\|_\infty}{N\left(x^{(P)}\right)}\right)_{P\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée, on ne peut pas trouver de constante $K > 0$ telle que $\forall x \in \mathscr{C} \setminus \{0_{\mathscr{C}}\}, \|x\|_\infty \leq KN(x)$.
   Ainsi $\boxed{\text{les deux normes } N \text{ et } \| \|_\infty \text{ ne sont pas équivalentes}}$