DS03 du 30/11/2024 (4h)
Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Questions de topologie

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E$, $||f||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

1. Les normes $||\ ||_\infty$ et $||\ ||_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
2. Dans cette question, on munit E de la norme $||\ ||_\infty$.
   (a) Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$
   Prouver que u est une application linéaire continue sur E et calculer $|||u|||$ (la norme subordonnée associée)
   (b) On pose $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$.
   Prouver que F est une partie fermée de E pour la norme $||\ ||_\infty$.
3. Dans cette question, on munit E de la norme $||\ ||_1$.
   Soit $c : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$
   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \left\{ \begin{array}{lll} nx & \text{si} & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} & \frac{1}{n} < x \leqslant 1 \end{array} \right.$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $||f_n - c||_1$.
   (b) On pose $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$.
   On note $\bar{F}$ l'adhérence de F.
   Prouver que $c \in \bar{F}$
   F est-elle une partie fermée de E pour la norme $||\ ||_1$?
   (c) L'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array} \right.$ est-elle continue si on munit E de la norme $\|\ \|_1$?

* * *

Exercice 2 : Questions sur les espaces préhilbertiens

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E.
   Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
   (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
3. Ici, $E = \mathbb{R}^2$, muni de son produit scalaire usuel. Déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion par rapport à la droite F d'équation cartésienne $y = 3x$.
4. Ici, $E = \mathbb{R}^3$, muni de son produit scalaire usuel et $F = Vect(1,1,1)$.
   Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p_F sur la droite F.

* * *

Exercice 3 : Etude de deux suites récurrentes

L'objet du problème est l'étude des deux suites récurrentes doubles définies par :

$$u_0 = a, u_1 = b, \forall n \geqslant 0, u_{n+2} = \frac{2}{u_{n+1} + u_n} \quad \text{et} \quad v_0 = a, v_1 = b, \forall n \geqslant 0, v_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{v_{n+1} v_n}}$$

où a et b sont deux réels strictement positifs.

1. Montrer que ces deux suites sont bien définies et à termes strictement positifs.

Partie I : étude de la suite (v_n)

2. Quelles sont les limites possibles, finies ou infinies, de la suite (v_n) ?
   (On justifiera précisément la réponse).
3. On pose : $w_n = \ln(v_n)$.
   (a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (w_n).
   On note F l'espace vectoriel complexe des suites complexes vérifiant cette relation de récurrence.
   (b) Déterminer une base de F.
   (c) Si $(x_n) \in F$, que peut-on dire de la convergence de (x_n) ?
4. Que peut-on en déduire concernant le comportement de la suite (v_n) ? sur le comportement de la série $\sum_{n \geqslant 0} v_n$? de la série $\sum_{n \geqslant 0} (v_n - 1)$?

Partie II : valeurs d'adhérence et étude de la suite (u_n)

On considère une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On rappelle qu'une valeur d'adhérence de (x_n) est un réel λ pour lequel il existe une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) qui converge vers λ. On rappelle que toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence et on admet que tout suite réelle bornée admet une plus petite et une plus grande valeur d'adhérence.

5. (a) Soit (x_n) une suite bornée non convergente admettant λ pour valeur d'adhérence. Justifier l'existence d'un réel $r > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ vérifiant $|x_n - \lambda| > r$. En déduire que (x_n) admet une valeur d'adhérence $\lambda' \neq \lambda$.
   (b) Montrer que toute suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence est convergente.
   (c) Soit (x_n) une suite bornée. On note ℓ_- sa plus petite valeur d'adhérence et ℓ_+ sa plus grande. Montrer l'équivalence : (x_n) est convergente si et seulement si $\ell_- = \ell_+$.
6. On s'intéresse maintenant à la suite (u_n) définie en préambule. On considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^2 & \to & (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ (x, y) & \mapsto & \left(y, \frac{2}{x+y}\right) \end{array}.$$

   On a alors : $f(u_n, u_{n+1}) = (u_{n+1}, u_{n+2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On pose $\alpha = \min\{u_0, u_1, \dfrac{1}{u_0}, \dfrac{1}{u_1}\} > 0$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$.
   On note ℓ_- et ℓ_+ les plus petite et plus grande valeurs d'adhérence de (u_n).
   (b) Justifier l'existence d'une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\varphi(n)+1})$ convergent et $u_{\varphi(n)+2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_-$. En déduire l'inégalité $\ell_- \ell_+ \geqslant 1$.
   (c) Montrer que l'on a : $\ell_- \ell_+ = 1$.
   (d) En considérant une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) telle que $(u_{\varphi(n)})$, $(u_{\varphi(n)+1})$ et $(u_{\varphi(n)+2})$ convergent et $(u_{\varphi(n)+3}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell_-$, obtenir l'égalité $\ell_- = \ell_+$.
   (e) Montrer la convergence de (u_n) et déterminer sa limite.

* * *

Exercice 4 : Etude de normes matricielles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, on note $\| \ \|_\infty$ la norme usuelle sur $\mathbb{C}^n$ définie pour $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ par :

$$\| (z_1, z_2, \ldots, z_n) \|_\infty = \max(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|)$$

et on identifie le n-uplet $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ au vecteur colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $||| \ A \ |||_\infty$ la norme de A pour la norme subordonnée à la norme $\| \ \|_\infty$. On rappelle que celle-ci est définie de la manière suivante :

$$||| \ A \ |||_\infty = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\| AX \|_\infty}{\| X \|_\infty} = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|X\|_\infty \leqslant 1} \| AX \|_\infty .$$

Enfin, pour $Z \in \mathbb{C}^n$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $N_P(Z) = \| PZ \|_\infty$.

1. Redémontrer que la norme subordonnée $||| \cdot |||_\infty$ est sous-multiplicative, c'est-à-dire

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \qquad ||| \ AB \ |||_\infty \leq ||| \ A \ |||_\infty ||| \ B \ |||_\infty .$$

2. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & m_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On pose $m = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |m_{i,i}|$.

   (a) Soit $Z \in \mathbb{C}^n$. Montrer que $\| DZ \|_\infty \leqslant m \| Z \|_\infty$.

   (b) Déterminer $||| \ D \ |||_\infty$.

3. (a) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que N_P est une norme sur $\mathbb{C}^n$ ssi P est une matrice inversible.
   Lorsque P est inversible, on notera dorénavant $\| \ \|_P$ pour N_P :

$$\forall Z \in \mathbb{C}^n, \qquad \|Z\|_P = N_P(Z) = \|PZ\|_\infty,$$

   et la norme matricielle subordonnée à la norme $\| \ \|_P$ sera notée $||| \ |||_P$:

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \qquad ||| \ A \ |||_P = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\| AX \|_P}{\| X \|_P} = \sup_{X \in \mathbb{C}^n, \|X\|_P \leqslant 1} \| AX \|_P .$$

   Comme toute norme subordonnée, la norme $||| \ |||_P$ est sous-multiplicative.

   (b) On se donne une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que :

$$||| \ A \ |||_P = ||| \ PAP^{-1} \ |||_\infty .$$

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres (complexes) de M et on définit $\rho(M)$ par : $\rho(M) = \max\{| \ \mu \ |, \mu \in \mathrm{sp}(M)\} \in \mathbb{R}^+$.
   On dit que $\rho(M)$ est le rayon spectral de M.

   (a) Montrer que, pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$, on a : $\rho(A) = \rho(PAP^{-1})$.

   (b) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\rho(A) \leqslant ||| \ A \ |||_P$.
   Indication : partir d'une valeur propre $\lambda \in sp(A)$ et d'un vecteur propre X associé.

(c) On suppose A diagonalisable.
Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) = ||| A |||_P$.

(d) *Un exemple.* Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\rho(A)$.
Déterminer l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) = ||| A |||_P$.

(e) *Un autre exemple.* Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par : $\forall i, j \in [\![1, n]\!], a_{i,j} = j$.
Déterminer l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) = ||| A |||_P$.

5. Dans cette dernière partie, on suppose que $n = 2$. Soit donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

(a) On pose $m = \max(|a| + |b|, |c| + |d|)$. Montrer que, pour tout $Z \in \mathbb{C}^2$, on a :
$\| AZ \|_\infty \leqslant m \| Z \|_\infty$. Déterminer $||| A |||_\infty$.

(b) On suppose la matrice A non diagonalisable et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à A.

i. Démontrer que $\mathrm{sp}(A)$ ne contient qu'un seul élément. On le note α.

ii. Démontrer l'existence d'une base e de $\mathbb{C}^2$ telle que : $Mat_e(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

iii. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer l'existence d'une base e' de $\mathbb{C}^2$ telle que :
$Mat_{e'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où $|\beta'| \leqslant \varepsilon$.

iv. En déduire l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que : $||| A |||_P \leqslant \rho(A) + \varepsilon$.

(c) Déterminer $\inf\limits_{P \in GL_2(\mathbb{C})} ||| A |||_P$.

(d) *Un exemple.* Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $||| A |||_\infty$ et montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $||| A |||_P \leqslant 2$.

(e) On suppose que $\rho(A) < 1$. Justifier l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que : $||| A |||_P < 1$, et en déduire que la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite à préciser.

* * *