DS03 du 22/11/2023 (2h)
Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Questions de cours

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.
2. Est-ce vrai avec une intersection infinie ?
3. Montrer que toute partie compacte de E est fermée.
4. Soit A une partie compacte de E et $f : A \to F$ une application continue (où F est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé). Montrer que $f(A)$ est une partie compacte de F.
5. Soit A une partie connexe par arcs de E et $f : A \to F$ continue. Montrer que $f(A)$ est connexe par arcs.
6. En considérant une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, montrer que A ouvert et f continue n'impliquent pas toujours $f(A)$ ouvert.
7. Soit N une deuxième norme sur E, équivalente à $\|.\|$.
   Si U est un ouvert de $(E, \|.\|)$, montrer que U est un ouvert de (E, N).

* * *

Exercice 2

E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
L'espace produit $E \times F$ est muni de sa norme habituelle :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \qquad \|(x, y)\|_{E\times F} = \max(\|x\|_E, \|y\|_F).$$

1. Soit Ω un ouvert de E.
   (a) Montrer que pour tout $a \in E$, la partie $\{a\} + \Omega = \{a + x,\ x \in \Omega\}$ est un ouvert de E.
   (b) En déduire que pour toute partie $A \subset E$, la partie $A + \Omega = \{a + x,\ (a, x) \in A \times \Omega\}$ est un ouvert de E.
2. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

* * *

Exercice 3

Soient $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $u : E \to E$ l'endomorphisme qui envoie $f \in E$ sur la fonction

$$u(f) : x \mapsto f(x) - f(0).$$

1. L'endomorphisme u est-il continu pour la norme $\| . \|_\infty$? Si oui, calculer la norme subordonnée :

$$|||u|||_\infty = \sup_{f \neq 0_E} \frac{\|u(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}.$$

2. L'endomorphisme u est-il continu pour la norme $\| \, . \, \|_1$? Si oui, calculer la norme subordonnée :

$$|||u|||_1 = \sup_{f \neq 0_E} \frac{\|u(f)\|_1}{\|f\|_1}.$$

On rappelle que $\|.\|_1$ *est définie par* $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ *pour tout* $f \in E$.

* * *

Exercice 4

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que les sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
On admettra que l'ensemble E des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
L'endomorphisme identité de l'espace E sera noté id_E.
On définit l'application S de $\mathscr{C}$ dans E par :

$$\forall x \in \mathscr{C},\ S(x) = z,\ \text{avec} \quad \forall n \in \mathbb{Z},\ z_n = x_{-n}$$

1. Donner un exemple de suite non constante, élément de $\mathscr{C}$.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.
3. Prouver que si une suite x est dans $\mathscr{C}$, elle est bornée.
4. Montrer que S est un endomorphisme de $\mathscr{C}$.
5. Soient $F = \{x \in \mathscr{C}, \forall n \in \mathbb{Z},\ x_n = x_{-n}\}$ et $G = \{x \in \mathscr{C}, \forall n \in \mathbb{Z},\ x_n = -x_{-n}\}$.
   Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}$.
6. Prouver que S est une symétrie de $\mathscr{C}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.
7. On munit $\mathscr{C}$ de la norme infinie : si $x \in \mathscr{C}$, $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.
   Soit N l'application qui, à tout élément x de $\mathscr{C}$, associe $N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$.
   (a) Vérifier que, pour tout x de $\mathscr{C}$, $N(x)$ existe.
   (b) Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur l'espace $\mathscr{C}$.
   (c) Montrer que S est une isométrie de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}, N)$. Est-elle continue ?
   (d) Prouver que, dans cet espace normé, les sous-espaces vectoriels F et G sont des fermés.
   (e) Les deux normes $\| \ \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?