

DS03 du 04/10/2025 (4h) Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Questions sur les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Déterminer $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^\times$. Est-il cyclique ?
2. Déterminer $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$. Est-il cyclique ?
3. Parmi les deux groupes précédents, un seul est isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.
Lequel ? Exhiber un isomorphisme.
4. Démontrer que l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est un nombre premier.

* * *

Exercice 2 : Sous-groupes distingués

Soit G un groupe (pas nécessairement commutatif, dont la loi est notée multiplicativement, et le neutre est noté e). On dit qu'une partie $H \subset G$ est un sous-groupe distingué dans G si

- (i) H est un sous-groupe de G
 - (ii) $\forall g \in G, \forall h \in H, g^{-1}hg \in H$.
1. Montrer que $\{e\}$ et G sont des sous-groupes distingués dans G .
 2. Si G est commutatif, alors quels sont les sous-groupes distingués de G ?

A partir de maintenant, on ne suppose plus G commutatif.

3. Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes distingués dans G .
Montrer que $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe distingué dans G .
4. On considère l'ensemble

$$Z(G) = \{x \in G, \forall y \in G, xy = yx\}.$$
 Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe distingué dans G .
5. Soit H et K sont deux sous-groupes de G . On suppose que H est distingué dans G . Montrer que l'ensemble

$$HK := \{hk, h \in H, k \in K\} = \{x \in G, \exists h \in H, \exists k \in K, x = hk\}$$

est un sous-groupe de G .

6. Si G et G' sont deux groupes et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme, alors montrer que le noyau $\text{Ker}(f)$ est un sous-groupe distingué dans G .
7. Si G est un groupe, on appelle automorphisme de G tout morphisme $G \rightarrow G$ bijectif. On note $\text{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G .
 - (a) Montrer que $\text{Aut}(G)$ est un groupe pour la loi $\circ$ (composition des applications).
 - (b) Pour tout $a \in G$, on note f_a l'application $G \rightarrow G$ définie par $\forall x \in G, f_a(x) = a^{-1}xa$.
Montrer que $f_a \in \text{Aut}(G)$. On dit que f_a est un automorphisme intérieur de G .
 - (c) On note $\text{Int}(G)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G
(on a donc $\text{Int}(G) = \{f_a, a \in G\}$).
Montrer que $\text{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué dans $\text{Aut}(G)$.

* * *

Exercice 3 : Approximation d'une intégrale impropre par une série

On considère un réel $\alpha \in]0; \pi[$, et la fonction $h :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad h(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}.$$

Le but est de montrer que

$$\int_0^{+\infty} h(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2 \alpha}.$$

1. Montrer que l'intégrale impropre $I = \int_0^{+\infty} h(x) dx$ converge.

2. Montrer que $\forall x \in]0; +\infty[, |h'(x)| \leq \frac{4}{x^{3/2}}$.

Indication : on pourra séparer les cas $x \geq 1$ et $0 < x < 1$, et pour le second cas, utiliser l'inégalité $|\sin(x)| \leq x$ pour tout $x > 0$.

3. Montrer que pour tout entier $N \geq 1$ et pour tout $\alpha \in]0; \pi[$:

$$\int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} h(x) dx - \sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2 \alpha} = \sum_{n=1}^N \int_0^{\alpha} (h(n\alpha + t) - h(n\alpha)) dt.$$

4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha \in]0; \pi[, \forall t \in [0; \alpha], \quad |h(n\alpha + t) - h(n\alpha)| \leq \frac{4t}{(n\alpha)^{3/2}}.$$

5. En déduire que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha \in]0; \pi[, \quad \left| \int_{\alpha}^{(N+1)\alpha} h(x) dx - \sum_{n=1}^N \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2 \alpha} \right| \leq 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{3/2}}.$$

6. Justifier que les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2 \alpha}$ convergent (avec $\alpha \in]0; \pi[$), et que

$$\forall \alpha \in]0; \pi[, \quad \left| \int_{\alpha}^{+\infty} h(x) dx - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2 \alpha} \right| \leq 2\sqrt{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

7. Conclure que :

$$\int_0^{+\infty} h(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2 \alpha}.$$

* * *

Exercice 4 : La constante d'Euler

Les parties I et II de ce problème sont largement indépendantes.

Partie I : La constante γ . Une expression sous forme de série.

On pose pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad u_n = S_n - \ln n, \quad v_n = S_{n-1} - \ln n.$$

1. (a) Montrer que : $\forall x \in [0, 1[, x + \ln(1 - x) \leq 0$.

(b) Montrer que : $\forall x \in [0, 1[, x - \ln(1 + x) \geq 0$.

2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Etant adjacentes, les suites u et v convergent donc vers une limite commune, que l'on appelle la constante d'Euler, et que l'on note γ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \gamma.$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$x_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} x_n$ converge.

(b) En déduire que

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right).$$

Partie II : Une expression intégrale de la constante γ .

On pose pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x}.$$

4. (a) Montrer que g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ (encore notée g).

(b) Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}^+$. On notera K un réel tel que pour tout $x \geq 0$, $|g(x)| \leq K$.

5. On pose

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} g(x) dx.$$

Montrer que l'intégrale I est convergente.

6. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx.$$

(a) Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

(b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $X > 1$:

$$J(X) = \int_1^X \frac{e^{-x}}{x} dx \quad \text{et} \quad K_n(X) = \int_1^X \frac{e^{-nx}}{x} dx.$$

i. Montrer que $J(X)$ et $K_n(X)$ ont des limites finies lorsque X tend vers $+\infty$.

ii. Montrer que $K_n(X) = \int_n^{nX} \frac{e^{-x}}{x} dx$.

iii. En déduire que $I_n = \int_1^n \frac{e^{-x}}{x} dx$.

(c) En utilisant **6.(b).iii**, montrer que

$$I_n = \ln n - \int_1^n \frac{1 - e^{-x}}{x} dx.$$

7. Posons $F(t) = \int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx$.

(a) On pose pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\varphi_t(x) = \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x}.$$

Montrer que φ_t peut être prolongée par continuité en 0.

On continuera de noter φ_t la fonction continue sur $\mathbb{R}$ ainsi déterminée.

(b) Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que l'intégrale impropre $F(t)$ est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On admet dans la suite que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F'(t) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \left(\frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} \right) dx = \int_0^1 e^{-xt} dx$$

(c'est-à-dire que l'on peut "dériver sous le signe intégrale").

On démontrera ce résultat à la fin du problème.

(c) En calculant $F'(t)$, montrer que $F(t) = \int_1^t \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$ pour tout réel $t \geq 1$.

8. (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$ est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \ln n - \int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx$.

(c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} dx = \ln n.$$

9. Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$L_n = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-nx})g(x)dx.$$

(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $|L_n - I| \leq \frac{K}{n}$.

*On rappelle que la constante K a été définie en **4.(b)**, et l'intégrale I a été définie en **5**.*

(b) Montrer que la suite $(L_n)_{n \geq 2}$ converge. Donner sa limite.

(c) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $L_n = v_n$.

On rappelle que la suite (v_n) a été définie dans la partie I.

(d) En déduire que

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x}g(x)dx.$$

10. Pour terminer, nous allons démontrer le résultat qui a été admis (entre les questions **7.(b)** et **7.(c)**), à savoir :

la fonction $F : t \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(t) = \int_0^1 e^{-xt} dx$.

(a) A l'aide d'intégration par parties, montrer que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, et pour tout réel x :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \int_0^x (x-t)\varphi''(t)dt$$

(c'est la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2).

- (b) A l'aide de la formule précédente, montrer qu'il existe une constante M (à déterminer) telle que :

$$\forall h \in [-1, 1], \forall x \in [0, 1], |e^{-hx} - 1 + hx| \leq \frac{h^2 x^2}{2} M.$$

- (c) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $h \in [-1, 0[\cup]0, 1]$, montrer que :

$$\left| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \int_0^1 e^{-xt} dx \right| \leq \int_0^1 \frac{|h|x}{2} e^{-xt} M dx.$$

- (d) Conclure.

* * *