Corrigé de la seconde épreuve de mathématiques
Mines 2009 - Filière MP
Par H. Maarouf CPGE Mohammedia

Question préliminaire

1) Pour tout λ réel, la fonction ϕ_λ est continue sur $[0,1]$. D'un autre coté, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels tels que $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels non tous nuls tels que :

$$\alpha_1\phi_{\lambda_1} + \alpha_2\phi_{\lambda_2} + \dots + \alpha_n\phi_{\lambda_n} = 0,$$

alors pour tout x de $[0,1]$, on a :

$$\alpha_p x^{\lambda_p} + \dots + \alpha_n x^{\lambda_n} = 0$$

où p est le plus petit entier vérifiant $\alpha_p \neq 0$. En divisant par x^{λ_p}, pour $x \neq 0$ et on fait tendre x vers 0, on trouve $\alpha_p = 0$, ce qui constitut une contradiction. La famille $(\phi_\lambda)_{\lambda \geqslant 0}$ est donc libre.

A. Déterminants de Cauchy.

On pose, pour $0 < m \leqslant n$:

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}$$

qui est défini mais avec l'hypothèse

$$(H_n): \qquad \forall\ (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_i + b_j \neq 0$$

et $R(X) = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X-a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}$ qui est une fraction rationnelle de degré -1. Les pôles de cette fraction sont $-b_1, \dots, -b_n$ et ils sont simples à cause de l'hypothèse (H_n). Donc $R(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X+b_k}$ avec $A_k = \dfrac{P(-b_k)}{Q'(-b_k)}$, $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(X-a_i)$ et $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X+b_i)$. En particulier, $P(-b_k) = (-1)^{n-1}\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(b_k+a_i)$ et $(-1)^{n-1}\displaystyle\prod_{i=1, i\neq k}^{n}(b_k-b_i)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

2) Notons, pour $k \in [\![1,n]\!]$, $C_k = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_k} \\ \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_k} \end{pmatrix}$ de sorte que

$$\sum_{k=1}^{n} A_k C_k = \begin{pmatrix} R(a_1) \\ \vdots \\ R(a_{n-1}) \\ R(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ R(a_n) \end{pmatrix}$$

Par suite,

$$\begin{array}{rcl} A_nD_n & = & A_n\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_{n-1},C_n) \\ & = & \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_{n-1},A_nC_n) \\ & = & \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(C_1,\dots,C_{n-1},\displaystyle\sum_{k=1}^{n}A_kC_k) \\ & = & \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0 \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & R(a_n) \end{vmatrix} \\ & = & R(a_n)D_{n-1} \end{array}$$

où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3) On a $A_n = \dfrac{P(-b_n)}{Q'(-b_n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(b_n+a_k)}{(-1)^{n-1}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)} = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(b_n+a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}(\neq 0)$ et $R(a_n) = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_n+b_k)}$. D'où

$$\begin{array}{rcl} D_n & = & \dfrac{R(a_n)}{A_n}D_{n-1} \\ & = & \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_n+b_k)}\dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(b_n+a_k)}D_{n-1} \\ & = & \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_n+b_k)}\dfrac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(b_n+a_k)}\cdots\cdots\dfrac{(a_2-a_1)}{(b_2+a_2)(b_2+a_1)}\dfrac{(b_2-b_1)}{(b_2+a_1)}D_1 \end{array}$$

et avec $D_1 = \dfrac{1}{a_1+b_1}$, on trouve : (ou encore par une récurrence remplaçant les $\cdots\cdots$)

$$D_n = \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ 1\leqslant i\leqslant n}}(a_i+b_j)}$$

B. Distance d'un point à une partie dans un espace normé.

A étant une partie non vide de E espace vectoriel normé. Pour x dans E, la distance de x à A est :

$$\mathrm{d}(x,A) = \inf_{y\in A}\|x-y\|$$

4) Notons $B(x,r)$ la boule ouverte, au sens de la norme $\|\cdot\|$, de centre x et de rayon r. Par la caractérisation de la borne inférieure, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}(x,A)=0 & \Longleftrightarrow & \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,y\in A,\ \|x-y\|<\varepsilon \\ & \Longleftrightarrow & \forall\,\varepsilon>0\ \exists\,y\in A,\ y\in B(x,\varepsilon) \\ & \Longleftrightarrow & \forall\,\varepsilon>0\ A\cap B(x,\varepsilon)\neq\emptyset \text{ (c'est à dire } x \text{ est adhérent à } A) \end{array}$$

5) Soit $(A_n)_{n \geqslant 0}$ une suite croissante (au sens de l'inclusion) de parties de E telle que $\bigcup_{n \geqslant 0} A_n = A$. Remarquons que si X et Y sont deux parties non vides de E avec $X \subset Y$, alors $\mathrm{d}(x, X) \geqslant \mathrm{d}(x, Y)$. La suite $\big(\mathrm{d}(x, A_n)\big)_{n \geqslant 0}$ est donc décroissante et que $\mathrm{d}(x, A_n) \geqslant \mathrm{d}(x, A)$ pour tout n. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $y \in A$ tel que $\mathrm{d}(x, A) \leqslant \|x - y\| < \mathrm{d}(x, A) + \varepsilon$. Mais $\bigcup_{n \geqslant 0} A_n = A$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $y \in A_N$. Pour tout n entier naturel tel que $n \geqslant N$, on a :

$$\mathrm{d}(x, A) \leqslant \mathrm{d}(x, A_n) \leqslant \mathrm{d}(x, A_N) \leqslant \|x - y\| < \mathrm{d}(x, A) + \varepsilon$$

ceci montre que la suite $\big(\mathrm{d}(x, A_n)\big)_{n \geqslant 0}$ a pour limite $\mathrm{d}(x, A)$.

Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et B la boule fermée de centre x et de rayon $\|x\|$.

6) La partie $B \cap V$ est bornée car B est bornée. En plus, l'application : $y \mapsto \|x - y\|$ est continue sur V, donc $B \cap V$ est aussi femée. C'est donc compacte de V car c'est un espace vectoriel de dimension finie. Elle est alors (par définition séquentielle d'un compact par exemple) compacte de E.
Notons C le complémentaire dans V de $B \cap V$. Il est facile de voir que :

$$\mathrm{d}(x, V) = \min(\mathrm{d}(x, B \cap V), \mathrm{d}(x, C))$$

D'une autre part, $0_E \in B \cap V$ car V s-e-v de E et $\|x - 0_E\| \leqslant \|x\|$. Pour $y \in C$, on a $\|x - y\| > \|x\| \geqslant \mathrm{d}(x, B \cap V)$. En d'autres termes, $\mathrm{d}(x, B \cap V) < \mathrm{d}(x, C)$ et, par suite, $\mathrm{d}(x, V) = \mathrm{d}(x, B \cap V)$.

7) L'application $y \mapsto \|x-y\|$ est continue sur le *compact* $B \cap V$, elle est donc bornée et atteint sa borne inférieure. Il existe alors $y \in B \cap V$ (donc $y \in V$) tel que $\|x-y\| = \mathrm{d}(x, B \cap V)$ et par la question précédente, $\|x-y\| = \mathrm{d}(x, V)$.

C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien.

L'espace E est supposé muni d'un produit scalaire $(\cdot \,|\, \cdot)$ avec $\|x\| = \sqrt{(x \,|\, x)}$.

8) Le sous-espace V étant de dimension finie, la question précédente assure l'existence de y dans V tel que $\|x - y\| = \mathrm{d}(x, V)$. Soit z la projection orthogonale de x sur V. En particulier, on a $\|x - y\| \leqslant \|x - z\|$. D'un autre coté, $(x - y) = \underbrace{(x - z)}_{\in V^\perp} - \underbrace{(y - z)}_{\in V}$ et par le théorème de Pythagore :

$$\|x - y\|^2 = \|x - z\|^2 + \|y - z\|^2$$

ce qui montre que $\|y - z\|^2 = 0$ et par suite $y = z$.

Pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, on note $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le déterminant de la matrice de Gramm :

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} (x_1 \,|\, x_1) & (x_1 \,|\, x_2) & \ldots & (x_1 \,|\, x_n) \\ (x_2 \,|\, x_1) & (x_2 \,|\, x_2) & \ldots & (x_2 \,|\, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n \,|\, x_1) & (x_n \,|\, x_2) & \ldots & (x_n \,|\, x_n) \end{pmatrix}$$

9) Notons V le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_1, \ldots, x_n)$. Puisque $V \cap V^\perp = \{0_E\}$ et $V^\perp = \{x_1, \ldots, x_n\}^\perp$, alors on a

$$\forall\, x \in V,\ (x = 0_E \iff \forall k \in [\![1, n]\!]\,, (x \,|\, x_k) = 0)$$

Notons aussi L_k la k-ième ligne de la matrice de Gramm ci-dessus, vue comme élément de $\mathbb{K}^n$. Une combinaison linéaire de type $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k$ est une ligne de type :

$$L = \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \,\middle|\, x_1 \right), \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \,\middle|\, x_2 \right), \ldots, \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \,\middle|\, x_n \right) \right)$$

Cette ligne est nulle si et seulement si le vecteur $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ est nul. En résumé :

$$\begin{aligned}
G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ est non inversible} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ non tous nuls et } \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k = 0_{\mathbb{K}^n} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ non tous nuls et } \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0_E \\
&\Longleftrightarrow \quad (x_1, \ldots, x_n) \text{ est liée}
\end{aligned}$$

10) La famille $X = (x_1, \ldots, x_n)$ est libre et V est le sous-espace engendré par cette famille. Soit x un élément de E et y sa projection orthogonale sur V. Puisque $x - y \in V^{\perp}$, alors $(x_i \,|\, x) = (x_i \,|\, y)$ et $(x \,|\, x) = (y \,|\, y) + (x - y \,|\, x - y)$ et

$$\begin{aligned}
G(x_1, \ldots, x_n, x) &= \begin{vmatrix} (x_1 \,|\, x_1) & (x_1 \,|\, x_2) & \ldots & (x_1 \,|\, x_n) & (x_1 \,|\, x) \\ (x_2 \,|\, x_1) & (x_2 \,|\, x_2) & \ldots & (x_2 \,|\, x_n) & (x_2 \,|\, x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_n \,|\, x_1) & (x_n \,|\, x_2) & \ldots & (x_n \,|\, x_n) & (x_n \,|\, x) \\ (x \,|\, x_1) & (x \,|\, x_2) & \ldots & (x \,|\, x_n) & (x \,|\, x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (x_1 \,|\, x_1) & (x_1 \,|\, x_2) & \ldots & (x_1 \,|\, x_n) & (x_1 \,|\, y) \\ (x_2 \,|\, x_1) & (x_2 \,|\, x_2) & \ldots & (x_2 \,|\, x_n) & (x_2 \,|\, y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_n \,|\, x_1) & (x_n \,|\, x_2) & \ldots & (x_n \,|\, x_n) & (x_n \,|\, y) \\ (y \,|\, x_1) & (y \,|\, x_2) & \ldots & (y \,|\, x_n) & (x \,|\, x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (x_1 \,|\, x_1) & (x_1 \,|\, x_2) & \ldots & (x_1 \,|\, x_n) & (x_1 \,|\, y) \\ (x_2 \,|\, x_1) & (x_2 \,|\, x_2) & \ldots & (x_2 \,|\, x_n) & (x_2 \,|\, y) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_n \,|\, x_1) & (x_n \,|\, x_2) & \ldots & (x_n \,|\, x_n) & (x_n \,|\, y) \\ (y \,|\, x_1) & (y \,|\, x_2) & \ldots & (y \,|\, x_n) & (y \,|\, y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (x_1 \,|\, x_1) & (x_1 \,|\, x_2) & \ldots & (x_1 \,|\, x_n) & 0 \\ (x_2 \,|\, x_1) & (x_2 \,|\, x_2) & \ldots & (x_2 \,|\, x_n) & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (x_n \,|\, x_1) & (x_n \,|\, x_2) & \ldots & (x_n \,|\, x_n) & 0 \\ (y \,|\, x_1) & (y \,|\, x_2) & \ldots & (y \,|\, x_n) & \|x - y\|^2 \end{vmatrix} \\
&= \underbrace{G(x_1, \ldots, x_n, y)}_{=0 \text{ (d'après 9)}} + \|x - y\|^2 \underbrace{G(x_1, \ldots, x_n)}_{\neq 0 \text{ (d'après 9)}}
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{d}(x, V)^2 = \|x - y\|^2 = \dfrac{G(x_1, \ldots, x_n, y)}{G(x_1, \ldots, x_n)}$

D. Comparaison des normes N_∞ et N_2

11) Soit $f \in C([0,1])$. On a $N_\infty(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. Alors,

$$N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t} \leqslant \sqrt{\int_0^1 N_\infty(f)^2 \, \mathrm{d}t} = N_\infty(f)$$

Soit maintenant $g \in \overline{A}^{\infty}$. Il existe une suite $(g_n)_{n \geqslant 0}$ telle que la suite de terme général $N_\infty(g_n - g)$ tend vers 0. Par comparaison des normes vue précédement, la suite de terme général $N_2(g_n - g)$ tend vers 0 Donc $g \in \overline{A}^2$. Par suite, $\overline{A}^{\infty} \subset \overline{A}^2$. En particulier un fermé au sens de la norme N_2 est fermé au sens de la norme N_∞.

Notons $V_0 = \{f \in C([0,1])\,;\ f(0) = 0\}$.

12) Pour n entier naturel, on note $f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n+1} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$. C'est une suite d'éléments de V_0. En plus,

$$\begin{aligned} N_2(f_n-\phi_0) &= \sqrt{\int_0^{\frac{1}{n+1}} ((n+1)t-1)^2 \, \mathrm{d}t} \\ &\leqslant \sqrt{\int_0^{\frac{1}{n+1}} 1 \, \mathrm{d}t} \quad (\text{car } ((n+1)t-1)^2 \leqslant 1) \\ &\leqslant \sqrt{\frac{1}{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

ϕ_0 est bien un point adhérent à V_0.

13) Soit f un élément de $C([0,1])$. On a $f = f(0)\phi_0 + f - f(0)\phi_0$ et posons $g_n = f(0)f_n + f - f(0)\phi_0$ avec (f_n) la suite définie dans la question précédente. La suite (f_n) est d'éléments de V_0 et $N_2(g_n - f) = |f(0)|N_2(f_n - \phi_0)$ qui tend vers 0 quand n croît indéfiniment. Ce qui montre la densité de V_0 dans $C([0,1])$.
Si f est un élément de V_0, alors $N_\infty(f-\phi_0) \geqslant |f(0) - \phi_0(0)| = 1$. En d'autres termes, la boule ouverte de centre ϕ_0 et de rayon 1 au sens de la norme N_∞ ne rencontre pas V_0. V_0 est non dense dans $C([0,1])$ au sens de cette norme.

14) Soit V un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé et $\overline{V}$ son adhérence. On a $V \subset \overline{V}$, ce dernier est donc non vide. Soit x, y deux éléments de $\overline{V}$ et α un scalaire. Il existe deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites déléments de V qui convergent respectivement vers x et y. La suite $(\alpha x_n + y_n)_n$, qui est une suite déléments de V car c'est un sous-espace vectoriel, converge vers $\alpha x + y$. C'est à dire $\alpha x + y \in \overline{V}$. C'est donc un sous-espace vectoriel.

15) $(\Longrightarrow)$ Ce sens est évident puisque $\overline{V}^\infty = C([0,1])$.
$(\Longleftarrow)$ Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[0,1]$, c'est à dire $\mathcal{P} = \mathrm{vect}(\phi_m)_{m \geqslant 0}$. D'après le théorème de Weirstrass, $\overline{\mathcal{P}}^\infty = C([0,1])$ et par hypothèse, $\mathcal{P} \subset \overline{V}^\infty$. $\overline{V}^\infty$ étant un fermé, donc $C([0,1]) = \overline{\mathcal{P}}^\infty \subset \overline{V}^\infty \subset C([0,1])$.

16) $(\Longrightarrow)$ De même, ce sens est évident puisque $\overline{V}^2 = C([0,1])$.
$(\Longleftarrow)$ $\overline{V}^2$ étant fermé au sens de la norme N_2, alors il est fermé au sens de la norme N_∞ (d'après la question 11)) donc il est égal à son adhérence. C'est un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ (d'après la question 14)) et contient tous les ϕ_m $(m \geqslant 0)$. D'après la question 15), $\overline{V}^2 = C([0,1])$. C'est à dire que V est dense au sens de N_2 dans $C([0,1])$.

E. Un critère de densité de W pour la norme N_2

$(\lambda_k)_{k \geqslant 0}$ étant une suite de réels positifs et deux à deux distincts. Pour n entier naturel, $W_n = \mathrm{vect}(\phi_{\lambda_0}, \ldots, \phi_{\lambda_n})$ et $W = \mathrm{vect}(\phi_{\lambda_k})_{k \geqslant 0}$.

17) Remarquons $W = \bigcup_{n \geqslant 0} W_n$ et que la suite $(W_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante. Alors,

$$\begin{aligned} W \text{ est dense} &\iff \forall\, \mu \in \mathbb{N},\ \phi_\mu \text{ est adhérent à } W \text{ (question 15)} \\ &\iff \forall\, \mu \in \mathbb{N},\ \mathrm{d}(\phi_\mu, W) = 0 \text{ (question 4)} \\ &\iff \forall\, \mu \in \mathbb{N},\ \lim_n \mathrm{d}(\phi_\mu, W_n) = 0 \text{ (question 5)} \end{aligned}$$

18) Soit $\mu \geqslant 0$. D'après la question 10), on a, puisque $(\phi_0, \ldots, \phi_n)$ est une famille libre,

$$\mathrm{d}(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{G(\phi_{\lambda_0}, \ldots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)}{G(\phi_{\lambda_0}, \ldots, \phi_{\lambda_n})}$$

D'une autre part, pour tous α et β réels positifs,

$$(\phi_\alpha \,|\, \phi_\beta) = \int_0^1 t^{\alpha+\beta} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+\beta+1}$$

Donc $G(\phi_{\lambda_0}, \ldots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)$ est un déterminant de Cauchy d'ordre $n+2$ ($a_k = \lambda_{k-1}$, $b_k = \lambda_{k-1}+1$ pour $k \in [\![1, n+1]\!]$, $a_{n+2} = \mu$ et $b_{n+2} = \mu + 1$) et $G(\phi_{\lambda_0}, \ldots, \phi_{\lambda_n})$ est un déterminant de Cauchy d'ordre $n+1$. Par la question 3), on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\phi_\mu, W_n)^2 &= \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+2}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n+2\\1\leqslant i\leqslant n+2}}(a_i+b_j)} \frac{\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n+1\\1\leqslant i\leqslant n+1}}(a_i+b_j)}{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}\\
&= \frac{\displaystyle\prod_{1\leqslant i<n+2}(a_{n+2}-a_i)(b_{n+2}-b_i)}{(a_{n+2}+b_{n+2})\displaystyle\prod_{1\leqslant j\leqslant n+1}(a_{n+2}+b_j)\prod_{1\leqslant i\leqslant n+1}(a_i+b_{n+2})}\\
&= \frac{\displaystyle\prod_{0\leqslant i<n+1}(\mu-\lambda_i)^2}{(2\mu+1)\displaystyle\prod_{0\leqslant j\leqslant n}(\mu+\lambda_j+1)^2}
\end{aligned}$$

C'est à dire que : $\mathrm{d}(\phi_\mu, W_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2\mu+1}}\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\dfrac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}$.

19) Soit $\mu \geqslant 0$. C'est clair que si la suite $(\lambda_k)_{k\,\geqslant\,0}$ tend vers $+\infty$, la suite $\left(\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\,\geqslant\,0}$ tend vers 1. Supposons maintenat que la suite $\left(\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\,\geqslant\,0}$ tend vers 1. Puisque, $\dfrac{\mu}{\mu+1} < 1$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout k entier naturel avec $k \geqslant K$, on a :

$$\frac{\mu}{\mu+1} < \frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}$$

Donc si pour un certain $k \geqslant K$, on a $\lambda_k \leqslant \mu$, alors

$$\frac{\mu}{\mu+1} < \frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1} = \frac{\mu-\lambda_k}{\lambda_k+\mu+1} \leqslant \frac{\mu}{\mu+1}$$

ce qui sera contradictoire. Par suite, pour $k \geqslant K$, la suite de terme général

$$\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1} = \frac{\lambda_k-\mu}{\lambda_k+\mu+1} = 1 - \frac{2\mu+1}{\lambda_k+\mu+1}$$

tend vers 1 et la suite $\left(\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\,\geqslant\,K}$ tend vers 0. Ceci montre que la suite $(\lambda_k)_{k\,\geqslant\,0}$ tend vers $+\infty$.

20) On suppose que $\lambda_k \neq 0$ pour tout k entier naturel.
($\Longleftarrow$) Supposons que la série $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente et soit μ un entier naturel. La suite $\mathrm{d}(\phi_\mu, W_n)_n$ étant décroissante et minorée par 0. Notons l sa limite. Si $l > 0$, alors

$$\frac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1} = \frac{\mathrm{d}(\phi_\mu, W_n)}{\mathrm{d}(\phi_\mu, W_{n-1})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{l}{l} = 1$$

D'après la question 19), la suite $(\lambda_k)_{k\,\geqslant\,0}$ tend vers $+\infty$. En compaosant par logartihme, la série

$$\sum_{n\,\geqslant\,0}\ln\left(\frac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1}\right)$$

est convergente et, puisque à partir d'un certain rang $\lambda_n > \mu$, on a :

$$\ln\left(\frac{|\lambda_n-\mu|}{\lambda_n+\mu+1}\right) = \ln\left(\frac{\lambda_n-\mu}{\lambda_n+\mu+1}\right) \sim \frac{-2\mu-1}{\lambda_n+\mu+1} \sim \frac{-2\mu-1}{\lambda_n}$$

$$\sum_{n\,\geqslant\,0}\frac{1}{\lambda_n}$$

est convergente, absurde. Donc pour tout $\mu \in \mathbb{N}$, $\lim_n \mathrm{d}(\phi_\mu, W_n) = 0$. La question 17) nous assure alors la densité de W dans $C([0,1])$ au sens de la norme N_2.
($\Longrightarrow$) On suppose à présent que W est dense dans $C([0,1])$ au sens de la norme N_2. Si la série

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{\lambda_n}$$

est convergente, alors la suite $(\lambda_n)_{n \geqslant 0}$ tend vers $+\infty$ et on aura, de même, l'équivalence :

$$\ln\left(\frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1}\right) = \ln\left(\frac{\lambda_n - \mu}{\lambda_n + \mu + 1}\right) \sim \frac{-2\mu - 1}{\lambda_n + \mu + 1} \sim \frac{-2\mu - 1}{\lambda_n}$$

ce qui montre la convergence de la série

$$\sum_{n \geqslant 0} \ln\left(\frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1}\right)$$

Notons S la somme de cette dernière série. Par la question 18), on aura

$$\mathrm{d}(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \longrightarrow \frac{\mathrm{e}^S}{\sqrt{2\mu+1}} > 0$$

et par la question 17), W est non dense dans $C([0,1])$ au sens de la norme N_2. Ce qui est une contradiction.

F. Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21) W étant dense dans $C([0,1])$ au sens de la norme N_∞, donc $\overline{W}^\infty = C([0,1])$. Mais d'après la question 11), $\overline{W}^\infty \subset \overline{W}^2$. Alors, $\overline{W}^2 = C([0,1])$ c'est à dire que W est dense dans $C([0,1])$ au sens de la norme N_2. D'après la question 20), la série $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

22) Soit $\mu \geqslant 1$ et notons $h = \phi_\mu - \psi$, avec $\psi = \sum_{k=0}^n a_k \phi_{\lambda_k}$. Puisque $\mu \geqslant 1$ et $\lambda_k \geqslant 1$, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $h' = \mu\phi_{\mu-1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k - 1}$. En plus, $\phi_\mu(0) = \phi_{\lambda_k}(0) = 0$, donc pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} |h(x)| &= \left|\int_0^x h'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \sqrt{\int_0^x h'(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^x 1^2\,\mathrm{d}t} \quad \text{Inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &\leqslant \sqrt{\int_0^1 h'(t)^2\,\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}t} = N_2(h') \end{aligned}$$

Par suite, $N_\infty(h) \leqslant N_2(h')$.

23) On suppose que $\begin{cases} (i): & \lambda_0 = 0 \\ (ii): & \lambda_k \geqslant 1 \text{ si } k \geqslant 1 \end{cases}$ et que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente. Puisque $\dfrac{1}{\lambda_k} \leqslant \dfrac{1}{\lambda_k - 1}$, la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant k_0} \frac{1}{\lambda_k - 1}$ (définie à partir d'un certain rang de sorte que $\lambda_k \neq 1$) est aussi divergente. D'après la question 20), le sous-espace $V = \mathrm{vect}(\phi_{\lambda_k - 1})_{k \geqslant 1}$ (qui contient $\mathrm{vect}(\phi_{\lambda_k - 1})_{k \geqslant k_0}$) est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.
Soit maintenant m un entier naturel et $\varepsilon > 0$. Par densité du sous-espace V dans $C([0,1])$ pour la norme N_2, il existe $\psi = \sum_{k=0}^n \alpha_k \phi_{\lambda_k - 1} \in V$ tel que $N_2((m+1)\phi_m - \psi) < \varepsilon$ et avec $\mu = m+1$, on aura, d'après 22)

$$N_\infty\left(\phi_{m+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{\lambda_k} \phi_{\lambda_k}\right) \leqslant N_2\left((m+1)\phi_m - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \phi_{\lambda_k - 1}\right) < \varepsilon$$

Donc $\phi_{m+1} \in \overline{W}^\infty$. En plus, l'hypothèse $\lambda_0 = 0$ montre que $\phi_0 \in W \subset \overline{W}^\infty$. La question 15) montre que W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

24) On suppose que $\begin{cases} (i) : & \lambda_0 = 0 \\ (ii') : & \inf\limits_{k \geqslant 1} \lambda_k > 0 \end{cases}$ et que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente. Posons $\lambda = \inf\limits_{k \geqslant 1} \lambda_k$ et $\lambda'_k = \dfrac{\lambda_k}{\lambda}$.

Alors,

$$\begin{cases} (i) : & \lambda'_0 = 0 \\ (ii') : & \lambda'_k \geqslant 1 \text{ si } k \geqslant 1 \end{cases} \quad \text{et la série } \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{\lambda'_k} \text{ est divergente}$$

D'après la question précédente, le sous-espace $W' = \text{vect}(\phi_{\lambda'_k})_{k \geqslant 0}$ est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞. Soit maintenant $f \in C([0,1])$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\phi = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \phi_{\lambda'_k} \in W'$ tel que $N_\infty(g - \phi) < \varepsilon$ où g est la fonction continue définie sur $[0,1]$ par $g(t) = f(t^{1/\lambda})$. Posons encore $\psi = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \phi_{\lambda_k}$ qui est un élément de W donné de sorte que $\phi(t^\lambda) = \psi(t)$. Pour tout t, on a :

$$|f(t) - \psi(t)| = \left| g(t^\lambda) - \phi(t^\lambda) \right| < \varepsilon$$

Donc $N_\infty(f - \psi) < \varepsilon$. D'où la densité de W dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.