

Corrigé du DS03 du 30/11/2024 (4h)

Sujet A (MPI*)

* * *

Exercice 1 : Un calcul de projeté orthogonal

Exercice 80 de la banque INP

1. L'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} fg$ est bien définie de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ (car on intègre des fonctions continues sur un segment) clairement bilinéaire (par linéarité de l'intégrale) et symétrique (par commutativité du produit de deux fonctions). En outre, on a pour tout $f \in E$, $(f|f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2 \geq 0$ (par positivité de l'intégrale et de la fonction f^2), et si $(f|f) = 0$, on en déduit par continuité et positivité de f^2 que $f^2 = 0$ sur $[0, 2\pi]$, donc $f = 0$ sur $[0, 2\pi]$, et enfin $f = 0_E$ par périodicité de f .

Ceci montre que $(f, g) \mapsto (f|g)$ est un produit scalaire sur E .

2. Le sous-espace vectoriel $F = Vect(f, g)$ est bien de dimension 2 car $f : x \mapsto \cos(x)$ est non nulle et $g : x \mapsto \cos(2x)$ n'est pas colinéaire à f (si $g = \alpha f$, alors $g(\pi/2) = \alpha f(\pi/2)$, donc $-1 = 0$, ce qui est absurde).

Notons $v = p_F(u)$ le projeté orthogonal de $u : x \mapsto \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ sur V .

On peut rapidement le déterminer si (comme dans le corrigé de la banque) on remarque que $x \mapsto 1/2$ est orthogonale à f, g (calculer les intégrales). Dans ce cas, on peut directement affirmer que $v = -\frac{1}{2}g$.

Mais si on ne le remarque pas, il faut tout de même savoir faire le calcul "de manière classique" ! On sait que $v = \alpha f + \beta g$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (car $v \in F$), mais aussi que $u - v \in F^\perp$, c'est-à-dire $(u - v|f) = (u - v|g) = 0$. On résout en linéarisant u : on a $u = \frac{1}{2}(1 - g)$ donc

$$0 = (u - v|f) = \left(\frac{1}{2} - \alpha f - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) g \mid f \right) = -\alpha \|f\|^2$$

$$0 = (u - v|g) = \left(\frac{1}{2} - \alpha f - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) g \mid g \right) = -\left(\beta + \frac{1}{2} \right) \|g\|^2$$

(car on obtient facilement $(1|f) = (1|g) = 0$, ainsi que $2\pi(f|g) = \int_0^{2\pi} fg = \int_0^{2\pi} \cos(x) \cos(2x) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(x) + \cos(3x)) = 0$). On en déduit (puisque f et g sont non nulles) que $(\alpha, \beta) = (0, -\frac{1}{2})$, donc finalement $v = p_F(u) = -\frac{1}{2}g$.

* * *

Exercice 2 : Etude de certains endomorphismes en dim. infinie

Extrait du sujet X-ENS Cachan PSI 2014

1. Si $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $T(f) : x \mapsto xf\left(\frac{x}{2}\right)$ est également continue sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles par composition et produit de fonctions continues. Donc $(f \in E \implies T(f) \in E)$.
2. Il est immédiat que pour $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in [0, 1], \quad T(f + \lambda g)(x) = x(f(x/2) + \lambda g(x/2)) = T(f)(x) + \lambda T(g)(x)$$

donc $T(f + \lambda g) = T(f) + \lambda T(g)$, ce qui montre que T est linéaire.

3. Si $f \in E$, on a

$$\forall x \in [0, 1], \quad |T(f)(x)| = |x| \times |f(x/2)| \leq |f(x/2)| \leq \|f\|_\infty$$

donc (en passant au sup)

$$\boxed{\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty},$$

ce qui montre que $\boxed{T \in \mathcal{L}_c(E)}$ (la constante $C = 1$ convient).

4. La question précédente montre que $\|T\| \leq 1$ (puisque $\|T\|$ est la plus petite constante $C \geq 0$ intervenant dans la continuité de T).

En outre, pour $f_0 : x \mapsto 1$, qui est bien dans $E \setminus \{0_E\}$, on a $T(f_0) : x \mapsto x$ et donc

$$\|T(f_0)\|_\infty = 1 = \|f_0\|_\infty.$$

La constante optimale est donc $C = 1$, ce qui montre que $\boxed{\|T\| = 1}$ (on a montré que $C = 1$ est un majorant de $X = \left\{ \frac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}, f \in E \setminus \{0_E\} \right\}$ qui est atteint en $f = f_0$, donc il s'agit de sa borne supérieure).

5. Soit $f \in \text{Ker}(T)$. On a alors $T(f) = 0_E$, c'est-à-dire $\forall x \in [0, 1]$, $xf(x/2) = 0$ et f est donc nulle sur $]0, 1/2]$. Par continuité, elle l'est aussi sur $[0, 1/2]$. Réciproquement, toute fonction continue sur $[0, 1]$ et nulle sur $[0, 1/2]$ est dans le noyau de T . Ainsi

$$\boxed{\text{Ker}(T) = \{f \in E, \forall x \in [0, 1/2], f(x) = 0\}}.$$

6. Soit $g \in \text{Im}(T)$. La fonction g est continue sur $[0, 1]$ et il existe une fonction continue f telle que $\forall x \in [0, 1]$, $g(x) = xf(x/2)$. Ainsi, on a

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{g(x) - g(0)}{x} = f(x/2) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$$

(par continuité de f en 0), ce qui montre que g est dérivable en 0 (et $g'(0) = f(0)$).

L'image de T est donc incluse dans l'ensemble des éléments de E s'annulant en 0 et dérivables en 0.

Réciproquement, supposons $g \in E$ nulle en 0 et dérivable en 0, et montrons que cette fonction g possède un antécédent $f \in E$ par la fonction T . Considérons la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f(0) = g'(0), \quad \forall x \in]0, 1/2] : f(x) = \frac{g(2x)}{2x}; \quad \forall x \in]1/2, 1] : f(x) = g(1).$$

- f est continue sur $]0, 1/2[\cup]1/2, 1]$ de façon immédiate.
- f est continue en 0 par définition de $g'(0)$ (et car $g(0) = 0$).
- f est continue en $1/2$ (immédiat à gauche et vrai par construction à droite).
- Par construction, $\forall x \in]0, 1]$, $xf(x/2) = g(x)$ et cela reste vrai en 0 par continuité des fonctions dans les deux membres.

On a ainsi $f \in E$ et $T(f) = g$ ce qui montre que $g \in \text{Im}(T)$. Finalement,

$$\boxed{\text{Im}(T) = \{g \in E, g(0) = 0 \text{ et } g \text{ dérivable en } 0\}}.$$

7. On a encore la linéarité de T (cela ne dépend pas de la norme choisie sur E). De plus, avec le changement de variable $u = x/2$, on a

$$\|T(f)\|_2^2 = \int_0^1 |T(f)(x)|^2 dx = \int_0^1 x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = 8 \int_0^{1/2} u^2 f^2(u) du \leq 2 \int_0^{1/2} f^2(u) du \leq 2\|f\|_2^2.$$

On a donc $\boxed{\forall f \in E, \|T(f)\|_2 \leq C\|f\|_2 \text{ avec } C = \sqrt{2}}$, ce qui montre que $\boxed{T \in \mathcal{L}_c(E)}$.

8. L'inégalité précédemment établie montre que $\|T\| \leq \sqrt{2}$. Nous allons montrer que $\|T\| = \sqrt{2}$ (donc que $C = \sqrt{2}$ est la constante optimale) en utilisant la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 2}$ proposée. Soit $n \geq 2$. On calcule $\|f_n\|_2^2$ et $\|T(f_n)\|_2^2$.

Si $x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right]$, $f_n(x) = n\left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$ et si $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}\right]$, $f_n(x) = n^2\left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}\right)$.
(équations de droites passant par deux points connus).

On a alors

$$\|f_n\|_2^2 = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} n^2 \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}} n^4 \left(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}\right)^2 dx = \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n^2}.$$

Posons $g_n = T(f_n)$. Pour $x \in [1 - \frac{2}{n}, 1]$, $g_n(x) = nx\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$ et g_n est nulle ailleurs.

On a donc

$$\|g_n\|_2^2 = n^2 \int_{1-\frac{2}{n}}^1 x^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^2 dx = \frac{n^2}{4} \int_{1-\frac{2}{n}}^1 x^2 \left(x - 1 + \frac{2}{n}\right)^2 dx.$$

On peut faire une double intégration par parties :

$$\|g_n\|_2^2 = \frac{2}{3n} - \frac{n^2}{6} \int_{1-\frac{2}{n}}^1 x \left(x - 1 + \frac{2}{n}\right)^3 dx = \frac{2}{3n} - \frac{2}{3n^2} + \frac{n^2}{24} \int_{1-\frac{2}{n}}^1 \left(x - 1 + \frac{2}{n}\right)^4 dx.$$

On trouve finalement :

$$\|T(f_n)\|_2^2 = \|g_n\|_2^2 = \frac{2}{3n} - \frac{2}{3n^2} + \frac{4}{15n^3}.$$

Donc

$$\frac{\|T(f_n)\|_2}{\|f_n\|_2} = \sqrt{\frac{\frac{2}{3n} - \frac{2}{3n^2} + \frac{4}{15n^3}}{\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}.$$

Le réel $C = \sqrt{2}$ est donc un majorant de l'ensemble $X = \left\{ \frac{\|T(f)\|_2}{\|f\|_2}, f \in E \setminus \{0_E\} \right\}$, qui est également adhérent à l'ensemble X (puisque'il est limite d'une suite d'éléments de X) : c'est donc sa borne supérieure, ce qui permet de conclure que $\boxed{\|T\| = \sqrt{2}}$.

Remarque

Attention, on est ici dans un cas où la borne supérieure $\|T\|$ ne sera pas atteinte : en effet, si on cherche $f_0 \in E \setminus \{0_E\}$ telle que $\|T(f_0)\|_2 = \sqrt{2}\|f_0\|_2$, ça ne marchera pas car d'après les calculs faits à la question précédente :

$$\begin{aligned} \|T(f_0)\|_2 = \sqrt{2}\|f_0\|_2 &\iff 8 \int_0^{1/2} u^2 f_0^2(u) du = 2 \int_0^1 f_0^2(u) du \\ &\iff \int_0^{1/2} f_0^2(u) \times \underbrace{(1 - 4u^2)}_{\geq 0} du + \int_{1/2}^1 f_0^2(u) du = 0, \end{aligned}$$

donc vu qu'il s'agit d'une somme nulle d'intégrales dont les intégrandes sont tous positifs et continus, on en déduit que

$$\|T(f_0)\|_2 = \sqrt{2}\|f_0\|_2 \iff f_0 \text{ est nulle sur } [0, 1/2[\text{ et } [1/2, 1] \iff f_0 = 0_E.$$

C'est pourquoi on propose ici une suite de fonctions $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qui **approche cette borne supérieure**, c'est-à-dire une suite (f_n) telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|T(f_n)\|_2}{\|f_n\|_2} = \sqrt{2}.$$

Pour trouver cette suite de fonctions, l'idée est la suivante : on prend une fonction aussi nulle que possible et qui réalise un pic en $x = 1/2$ (l'endroit où l'intégrale est coupée en deux dans le calcul précédent), et on fait en sorte que les aires soient les plus petites possibles.

9. Montrons la linéarité de S (celle de V est similaire) : pour $(\lambda, u, v) \in \mathbb{R} \times H \times H$, on a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(S(\lambda u + v))_n = (\lambda u + v)_{n-1} = \lambda u_{n-1} + v_{n-1} = \lambda(S(u))_n + (S(v))_n = (\lambda S(u) + S(v))_n,$$

et la même relation reste vraie pour $n = 0$, car

$$(S(\lambda u + v))_0 = 0 = (\lambda S(u) + S(v))_0.$$

Donc on a bien $S(\lambda u + v) = \lambda S(u) + S(v)$.

10. On a pour tout $u \in H$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n (S(u))_k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2 \leq \|u\|_2^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (V(u))_k^2 = \sum_{k=1}^{n+1} u_k^2 \leq \|u\|_2^2,$$

ce qui confirme que $S(u), V(u) \in H$ (des séries à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées convergent) et en passant à la limite, on obtient :

$$\|S(u)\|_2 \leq \|u\|_2 \quad \text{et} \quad \|V(u)\|_2 \leq \|u\|_2$$

(on a même $\|S(u)\|_2 = \|u\|_2$ en fait).

Donc $S, V \in \mathcal{L}_c(H)$.

11. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $u \in H$:

$$u \in \text{Ker}(S - \lambda \text{Id}_H) \iff S(u) = \lambda u \iff 0 = \lambda u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n-1} = \lambda u_n$$

Si $\lambda \neq 0$ alors $u_0 = 0$ puis, par récurrence, tous les u_n sont nuls, donc $u = 0_H$.

Si $\lambda = 0$, les relations précédentes donnent $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n-1} = 0$ et donc u est encore nulle.

On a donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{Ker}(S - \lambda \text{Id}_H) = \{0_H\}$, c'est-à-dire $S - \lambda \text{Id}_H$ est injective.

Aucun λ n'est donc valeur propre, et en on déduit que l'ensemble des valeurs propres de S est $\sigma_p(S) = \emptyset$.

12. On cherche les réels λ tels que $V - \lambda \text{Id}_H$ non injective, c'est-à-dire $\text{Ker}(V - \lambda \text{Id}_H) \neq \{0_H\}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $u \in H$:

$$u \in \text{Ker}(V - \lambda \text{Id}_H) \iff V(u) = \lambda u \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda^n u_0.$$

Si $\lambda \in \sigma_p(V)$, alors il existe une suite de H non nulle dans $\text{Ker}(V - \lambda \text{Id}_H)$. Cette suite est donc géométrique de raison λ et de premier terme $u_0 \neq 0$. De plus $u \in H$ indique que $\sum |\lambda|^2|^n$ converge c'est à dire que $\lambda \in]-1, 1[$. Ceci montre que $\sigma_p(V) \subset]-1, 1[$.

Réciproquement, si $\lambda \in]-1, 1[$, alors la suite $u = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \in H$ et $V(u) = \lambda u$. Comme $u \neq 0$ ($u_0 = 1$), on a donc $\lambda \in \sigma_p(V)$, ce qui prouve $] - 1, 1[\subset \sigma_p(V)$.

Finalement, on a $\sigma_p(V) =]-1, 1[$.

13. Il est immédiat que si $u \in F$ alors $S(u), V(u) \in F$ avec

$$\|S(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty \quad \text{et} \quad \|V(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty$$

(et on a même $\|S(u)\|_\infty = \|u\|_\infty$), ce qui montre que $S, V \in \mathcal{L}_c(F)$.

14. Le même raisonnement qu'à la question 11. (l'espace H n'a pas servi) montre que l'on a toujours

$$\sigma_p(S) = \emptyset.$$

De même, si $\lambda \in \sigma_p(V)$, il existe $u \in F$ non nulle telle que $V(u) = \lambda u$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n$$

et ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda^n u_0$. La suite u étant non nulle, on a $u_0 \neq 0$ et $u \in F$ indique que u est bornée, donc $\lambda \in [-1, 1]$. Réciproquement, si $\lambda \in [-1, 1]$, $u = (\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ et $V(u) = \lambda u$. Comme $u \neq 0$ ($u_0 = 1$), on a donc $\lambda \in \sigma_p(V)$. Finalement

$$\sigma_p(V) = [-1, 1]$$

(il y a plus de valeurs propres car on travaille sur un espace vectoriel plus grand, vu que $H \subset F$).

15. (a) S n'est pas surjective puisque tout élément de l'image de S a un premier terme nul et la suite constante égale à 1 (qui est bien dans F) n'a pas d'antécédent. Ainsi S n'est pas bijective, c'est-à-dire $0 \in \sigma(S)$.

- (b) Soit maintenant $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Soit $(u, v) \in F^2$ tels que $v = (S - \lambda Id_F)(u)$; on a $u_0 = -v_0/\lambda$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = u_{n-1} - \lambda u_n$$

ce qui donne aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda^{n-1} v_n = \lambda^{n-1} u_{n-1} - \lambda^n u_n$$

En sommant, les termes se télescopent et on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \lambda^{k-1} v_k = u_0 - \lambda^n u_n$$

et avec $u_0 = -v_0/\lambda$ on a finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^n \lambda^{k-1} v_k = -\sum_{k=0}^n \frac{v_k}{\lambda^{n-k+1}} = -\sum_{k=0}^n \frac{v_{n-k}}{\lambda^{k+1}} \quad (*)$$

(on pouvait aussi prouver cette formule par récurrence, partant des relations :

$$u_0 = -\frac{1}{\lambda} v_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{u_{n-1} - v_n}{\lambda}.$$

).

Réciproquement il est facile de voir que la suite (u_n) définie par la relation (*) vérifie

$$(S - \lambda Id_F)(u) = v \quad \text{car}$$

$$u_0 = -\frac{v_0}{\lambda},$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n-1} - \lambda u_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_{n-1-k}}{\lambda^{k+1}} + \lambda \sum_{k=0}^n \frac{v_{n-k}}{\lambda^{k+1}} = -\sum_{k=1}^n \frac{v_{n-k}}{\lambda^k} + \sum_{k=0}^n \frac{v_{n-k}}{\lambda^k} = v_n.$$

On a donc l'équivalence voulue.

- (c) Soit $\lambda \neq 0$.

- i. Supposons que $S - \lambda Id_F$ soit surjective de F dans F . La suite constante égale à 1 admet donc un antécédent donné par le calcul précédent. Cet antécédent étant dans F ,

$$u_n = -\frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^n \lambda^{k-1}$$

est le terme général d'une suite bornée. Ceci implique que $\lambda \neq 1$ (sinon $u_n = -n$) et que (on calcule la somme géométrique de raison $\lambda \neq 1$)

$$u_n = \frac{1}{1-\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda^{n+1}} \right)$$

est le terme général d'une suite bornée c'est à dire $|\lambda| \geq 1$.

En utilisant de même la suite $v = ((-1)^k)$, on voit qu'il faut que $\lambda \neq -1$.

La surjectivité de $S - \lambda Id_F$ entraîne donc $|\lambda| > 1$.

- ii. Réciproquement, supposons $|\lambda| > 1$. Soit $v \in F$ et u définie par les relations (*). On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq \frac{\|v\|_\infty}{|\lambda|^n} \sum_{k=0}^n |\lambda|^{k-1} = \frac{\|v\|_\infty}{|\lambda| - 1} \left(1 - \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \right) \leq \frac{\|v\|_\infty}{|\lambda| - 1},$$

donc u est bornée et $(S - \lambda Id_F)(u) = v$, ce qui montre que :

si $|\lambda| > 1$, alors $S - \lambda Id_F$ est surjective de F dans F .

- (d) L'endomorphisme $S - \lambda Id_F$ est toujours injectif (cf. question 16.), et il est surjectif si et seulement si $|\lambda| > 1$. On a donc $S - \lambda Id_F$ non bijectif si et seulement si $|\lambda| \leq 1$, ce qui montre que $\sigma(S) = [-1, 1]$.

* * *

Exercice 3 : Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Extrait du sujet Mines-Ponts MP 2017 math 2

1. (a) Considérons $\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} & \longrightarrow E \\ ((\lambda_i)_{1 \leq i \leq n+1}, (x_i)_{1 \leq i \leq n+1}) & \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{cases}$.

D'après la description de $Conv(K)$ donnée par l'énoncé, on a

$$Conv(K) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}, (x_1, \dots, x_{n+1}) \in K^{n+1} \right\} = \Phi(\mathcal{H} \times K^{n+1}).$$

- (b) Montrons que $\mathcal{H}$ est compact dans $\mathbb{R}^{n+1}$: tout d'abord $\mathcal{H}$ est fermé par caractérisation séquentielle (en effet, si $(\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{n+1,k})_k \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}}$ converge vers $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$, alors en passant à la limite lorsque $k \rightarrow +\infty$ dans les relations $\lambda_{1,k} \geq 0, \dots, \lambda_{n+1,k} \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{i,k} = 1$, on obtient $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$), et $\mathcal{H}$ est borné car inclus dans $[0, 1]^{n+1}$.
On en déduit que $\mathcal{H} \times K^{n+1}$ est compact car c'est un produit fini de compacts.
De plus, l'application Φ est bilinéaire sur un espace de dimension finie, donc continue.
Donc l'image $Conv(K) = \Phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$ est compacte dans E .
2. (a) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . En considérant les vecteurs proposés, on a pour tout $i \in [2, n]$, $(e_1 + e_i | e_1 - e_i) = \|e_1\|^2 - \|e_i\|^2 = 0$, donc par hypothèse sur g , on a $(g(e_1 + e_i) | g(e_1 - e_i)) = 0$, c'est-à-dire $\|g(e_i)\|^2 = \|g(e_1)\|^2$. Notons alors $k \in \mathbb{R}^+$ la valeur commune des $\|g(e_i)\|$ (pour $1 \leq i \leq n$). En décomposant un vecteur $x \in E$ dans la base orthonormée (e_i) , nous obtenons

$$g(x) = g\left(\sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i\right) = \sum_{i=1}^n (x|e_i)g(e_i),$$

donc puisque les $g(e_i)$ sont deux à deux orthogonaux (comme les e_i), on obtient par le théorème de Pythagore :

$$\|g(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 \|g(e_i)\|^2 = k^2 \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 = k^2 \|x\|^2.$$

On a montré que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$.

- (b) Si $k = 0$, alors $g = 0$ donc g est la composée de l'homothétie $0 \times Id_E$ avec l'isométrie Id_E (par exemple).
Si $k > 0$, alors $f = \frac{g}{k}$ est une isométrie vectorielle (endomorphisme qui conserve la norme) et $g = k Id_E \circ f$.
Dans les deux cas, g est la composée (commutative) d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.
3. L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ (démonstration classique, cf. cours, à refaire ici bien entendu), et c'est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car il est fermé (si $(A_k)_k \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge vers A , alors en passant à la limite dans les relations $\forall k \in \mathbb{N}, A_k^T A_k = I_n$, on obtient $A^T A = I_n$ par continuité du produit matriciel, et donc $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$) et borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisque si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\|A\|^2 = Tr(A^T A) = Tr(I_n) = n$.

4. S'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge, alors par composition de limites, on a $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Mais par hypothèse, $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| \geq \varepsilon$, ce qui est contradictoire. Donc la suite (x_n) ne possède aucune suite extraite convergente.
5. Fixons $\varepsilon > 0$. Si K est vide, alors le résultat est évident (le vide est inclus dans n'importe quelle réunion finie de boules de rayon $\varepsilon > 0$). Supposons donc K non vide. On va en fait montrer qu'il existe des éléments $x_1, \dots, x_p$ de K (et pas simplement de E) tels que $K \subset (B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_p, \varepsilon))$. Supposons le contraire et fixons $x_1 \in K$ (possible car K est non vide). Vu que K n'est pas inclus dans $B(x_1, \varepsilon)$, il existe $x_2 \in K$ tel que $\|x_2 - x_1\| \geq \varepsilon$. Mais K n'est pas non plus inclus dans $B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$, donc il existe $x_3 \in K$ tel que $\|x_3 - x_1\| \geq \varepsilon$ et $\|x_3 - x_2\| \geq \varepsilon$. On en déduit par récurrence une suite $(x_k)_{k \geq 1}$ à valeurs dans K telle que $\forall i \neq j, \|x_i - x_j\| \geq \varepsilon$ (à chaque étape, on utilise que K n'est pas inclus dans $B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_k, \varepsilon)$ donc il existe $x_{k+1} \in K$ tel que $\|x_{k+1} - x_i\| \geq \varepsilon$ pour tout $1 \leq i \leq k$), et une telle suite n'a pas de sous-suite convergente d'après la question précédente, ce qui contredit la compacité de K .

Remarque

Cette propriété s'appelle la *précompacité* (étant donné un rayon $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir K par une réunion finie de boules de rayon $\varepsilon > 0$).

6. (a) Supposons la propriété fautive, à savoir :

$$\forall \alpha > 0, \exists x \in K, \forall i \in I, B(x, \alpha) \not\subset \Omega_i.$$

A fortiori, avec $\alpha = 1/n$, on obtient que pour tout entier $n \geq 1$, il existe $x_n \in K$ tel que $\forall i \in I, B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset \Omega_i$. Cela définit une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans le compact K , qui possède donc une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $x^* \in K$.

En outre, par hypothèse, $K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ donc il existe $i \in I$ tel que $x^* \in \Omega_i$. On peut alors aboutir à une contradiction par deux méthodes :

- Ω_i est ouvert, donc il existe $r_i > 0$ tel que $B(x^*, r_i) \subset \Omega_i$. Mais $x_{\varphi(n)} \rightarrow x^*$, donc la boule $B(x^*, r_i/2)$ contient les termes $x_{\varphi(n)}$ à partir d'un certain rang n_0 . On a alors $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \subset B(x^*, r_i) \subset \Omega_i$ pour n assez grand, puisque

$$\|y - x_{\varphi(n)}\| < \frac{1}{\varphi(n)} \implies \|y - x^*\| \leq \|y - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - x^*\| < \frac{1}{\varphi(n)} + \frac{r_i}{2} < r_i.$$

Mais ceci est contradictoire avec la propriété $\forall i \in I, B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset \Omega_i$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \not\subset \Omega_i$, donc il existe $y_{n,i} \in E \setminus \Omega_i$ tel que $\|y_{n,i} - x_{\varphi(n)}\| < \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$. On a donc construit une suite $(y_{n,i})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers x^* puisque $y_{n,i} - x_{\varphi(n)} \rightarrow 0$ et $x_{\varphi(n)} \rightarrow x^*$. Cette suite est à valeurs dans le fermé $E \setminus \Omega_i$, donc sa limite également, ce qui donne $x^* \in E \setminus \Omega_i$, d'où une contradiction là encore.

Finalement, la propriété annoncée est vraie, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in K, \exists i \in I, B(x, \alpha) \subset \Omega_i.$$

- (b) Supposons que K est non vide (sinon c'est évident, le vide est inclus dans n'importe quelle réunion finie d'ouverts).

Appliquons la question 5. avec $\varepsilon = \alpha > 0$: il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p$ dans K tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^p B(x_k, \alpha)$. Par définition du réel α , chaque boule $B(x_k, \alpha)$ est incluse dans un ouvert de la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$, noté Ω_{i_k} . Donc finalement, $K \subset \bigcup_{k=1}^p B(x_k, \alpha) \subset \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}$.

Remarque

On a montré que tout compact K vérifie la **propriété de Borel-Lebesgue** : de tout recouvrement de K par des ouverts de E , on peut extraire un sous-recouvrement fini de K . Réciproquement, on peut montrer que tout ensemble K vérifiant la propriété de Borel-Lebesgue est compact : soit (x_n) une suite à valeurs dans K . Montrons par l'absurde que

cette suite à une valeur d'adhérence dans K . Si ce n'est pas le cas, alors pour tout $y \in K$, y n'est pas valeur d'adhérence, donc il existe $r_y > 0$ tel que $B(y, r_y)$ ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite (x_n) . Or, on a $K \subset \bigcup_{y \in K} B(y, r_y)$, donc par la propriété supposée, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $y_1, \dots, y_p$ dans K tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^p B(y_i, r_{y_i})$. Puisque tous les x_n sont dans K , cela implique qu'il existe $i_0 \in [1, p]$ tel que la boule $B(y_{i_0}, r_{y_{i_0}})$ contient une infinité de termes de la suite (x_n) , ce qui contredit la propriété définissant les r_y .

7. Puisque $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, on a $\bigcup_{i \in I} (E \setminus F_i) = E$. Ainsi, les ouverts $\Omega_i = E \setminus F_i$ recouvrent K , donc par la propriété précédemment démontrée, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $i_1, \dots, i_p$ dans I tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}$. En repassant au complémentaire, on obtient que $\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} \subset (E \setminus K)$. Mais on a aussi $\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} \subset K$, donc $\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} = \emptyset$.

8. Munissons $\mathcal{L}(E)$ (ev de dimension finie) de la norme subordonnée $\|\cdot\|$ associée à la norme $\|\cdot\|$. Pour $x \in E$ fixé, l'application $u \mapsto \|u(x)\|$ est continue (en fait lipschitzienne puisque $|\|u(x)\| - \|v(x)\|| \leq \|u(x) - v(x)\| \leq \|x\| \times \|u - v\|$) sur le compact G donc elle est bornée (et atteint ses bornes), ce qui montre notamment que $N_G(x) = \sup_{u \in G} \|u(x)\|$ est bien défini dans $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, N_G est bien une application de E dans $\mathbb{R}^+$. De plus :

- si $N_G(x) = 0$, alors $u(x) = 0_E$ pour tout $u \in G$, donc puisque $Id \in G$, on obtient en particulier $x = Id(x) = 0_E$.
- pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$:

$$N_G(\lambda x) = \sup_{u \in G} \|u(\lambda x)\| = \sup_{u \in G} |\lambda| \|u(x)\| = |\lambda| N_G(x),$$

car $|\lambda| \geq 0$.

- pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$\forall u \in G, \quad \|u(x+y)\| = \|u(x) + u(y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\| \leq N_G(x) + N_G(y),$$

donc $N_G(x+y) \leq N_G(x) + N_G(y)$.

Finalement, N_G est bien une norme sur E .

9. Etant donné $u \in G$ et $x \in E$, on a

$$N_G(u(x)) = \sup_{v \in G} \|v(u(x))\| = \sup_{v \in G} \|(v \circ u)(x)\|,$$

mais $\varphi_u : v \mapsto v \circ u$ est une bijection de G dans G (d'inverse $w \mapsto w \circ u^{-1}$) donc

$$N_G(u(x)) = \sup_{v \in G} \|\varphi_u(v)(x)\| = \sup_{w \in G} \|w(x)\| = N_G(x),$$

ce qui montre la première propriété.

Montrons maintenant que pour $(x, y) \in (E \setminus \{0_E\}) \times E$, on a :

$$N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, y = \lambda x.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $y = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors

$$N_G(x+y) = N_G((1+\lambda)x) = |1+\lambda| N_G(x) = (1+\lambda) N_G(x) = N_G(x) + N_G(\lambda x) = N_G(x) + N_G(y).$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$, alors par le théorème des bornes atteintes, il existe trois éléments u, v, w de G tels que $N_G(x) = \|u(x)\|$, $N_G(y) = \|v(y)\|$ et $N_G(x+y) = \|w(x+y)\|$, d'où l'égalité :

$$\|u(x)\| + \|v(y)\| = \|w(x+y)\| \leq \|w(x)\| + \|w(y)\|.$$

Mais $\|w(x)\| \leq N_G(x) = \|u(x)\|$ et $\|w(y)\| \leq N_G(y) = \|v(y)\|$ donc

$$\|w(x)\| + \|w(y)\| \leq \|u(x)\| + \|v(y)\| = \|w(x+y)\|,$$

d'où l'égalité

$$\|w(x+y)\| = \|u(x)\| + \|v(y)\|.$$

En mettant au carré et en développant, on obtient $(w(x)|w(y)) = \|w(x)\|\|w(y)\|$, qui est un cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi, la famille $(w(x), w(y))$ est liée, et comme $w(x) \neq 0$ (puisque x non nul et w bijectif), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w(y) = \lambda w(x)$, donc $y = \lambda x$ par linéarité et bijectivité de w .

Enfin, on obtient le signe de λ en remplaçant y par λx dans $(w(x)|w(y)) = \|w(x)\|\|w(y)\|$, ce qui donne $\lambda\|w(x)\|^2 = |\lambda|\|w(x)\|^2$, donc $\lambda = |\lambda| \in \mathbb{R}^+$.

10. (a) On a $x_1 = x \in K$ et $u(K) \subset K$, donc $u^i(x) \in K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit par convexité de K que $x_n \in K$, en tant qu'isobarycentre de $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ (combinaison convexe avec $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$). Ainsi, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans le compact K , elle possède donc une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers $a \in K$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de u et télescopage :

$$u(x_n) - x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u^i(x) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x) = \frac{u^n(x) - x}{n},$$

$$\text{donc } \|u(x_n) - x_n\| = \frac{\|u^n(x) - x\|}{n} \leq \frac{\delta(K)}{n}, \text{ puisque } x \text{ et } u^n(x) \text{ sont dans } K.$$

- (c) En particulier, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| \leq \frac{\delta(K)}{\varphi(n)} \leq \frac{\delta(K)}{n},$$

donc en passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient par continuité de u et de la norme :

$$\|u(a) - a\| \leq 0,$$

donc $u(a) = a$, c'est-à-dire que a est un point fixe de u .

11. Si $x \in K$, alors $u_i(x) \in K$ pour tout $i \in [1, r]$ (puisque les u_i sont dans G) donc par convexité de K , l'isobarycentre $u(x) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(x)$ est dans K . On a montré $u(K) \subset K$.

Attention, on ne sait pas si $u \in G$, donc on ne peut pas directement dire que $u(K) \subset K$!

Par la question 10, on déduit que l'endomorphisme u possède un point fixe $a \in K$.

12. (a) Puisque $\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a) = u(a) = a$, on a :

$$N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = N_G(a).$$

D'autre part, les u_i sont dans G donc par la question 9. :

$$\forall i \in [1, r], \quad N_G(u_i(a)) = N_G(a).$$

Il s'ensuit :

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(a) = N_G(a) = N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a)\right),$$

ce qui montre l'égalité voulue.

- (b) Soit $j \in [1, r]$. En notant $v_j(a) = \sum_{i \neq j} u_i(a)$, on a par la question précédente et l'homogénéité de N_G :

$$N_G(u_j(a) + v_j(a)) = N_G\left(\sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)).$$

Mais par l'inégalité triangulaire, on a aussi :

$$N_G(u_j(a) + v_j(a)) \leq N_G(u_j(a)) + N_G(v_j(a)) \leq \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)),$$

donc par transitivité :

$$N_G(u_j(a) + v_j(a)) \leq N_G(u_j(a)) + N_G(v_j(a)) \leq N_G(u_j(a) + v_j(a)),$$

ce qui donne l'égalité voulue :

$$N_G(u_j(a) + v_j(a)) = N_G(u_j(a)) + N_G(v_j(a)).$$

13. Soit $j \in [1, r]$. Si a est non nul, le vecteur $u_j(a)$ est non nul (car u_j bijectif) donc d'après la question 9., l'égalité $N_G(u_j(a) + v_j(a)) = N_G(u_j(a)) + N_G(v_j(a))$ précédemment obtenue implique l'existence d'un réel $\lambda_j \geq 0$ tel que $v_j(a) = \lambda_j u_j(a)$. Ainsi :

$$u(a) = \frac{u_j(a) + v_j(a)}{r} = \frac{1 + \lambda_j}{r} u_j(a),$$

ce qu'il fallait montrer. Et cela reste vrai si $a = 0_E$, car dans ce cas $u_j(a) = 0_E$ pour tout j et $u(a) = 0_E$.

14. Pour tout $j \in [1, r]$, on a donc

$$a = u(a) = \frac{1 + \lambda_j}{r} u_j(a).$$

En prenant la norme N_G , on obtient (puisque $N_G(u_j(a)) = N_G(a)$ du fait que $u_j \in G$) :

$$N_G(a) = \frac{1 + \lambda_j}{r} N_G(a),$$

donc si $a \neq 0_E$, on déduit $\frac{1 + \lambda_j}{r} = 1$ donc $u_j(a) = a$. Cela reste évidemment vrai si $a = 0_E$.

Dans tous les cas, le vecteur $a \in K$ est donc un point fixe de $u_1, \dots, u_r$.

15. Pour chaque $u \in G$, notons

$$F_u = \{x \in K, u(x) = x\}$$

(l'ensemble des points fixes de u dans K).

Chaque ensemble F_u est fermé dans E car $F_u = K \cap \text{Ker}(u - Id)$, K est fermé en tant que compact et $\text{Ker}(u - Id)$ est fermé en tant que SEV de dimension finie de E .

On dispose donc d'une famille $(F_u)_{u \in G}$ de fermés de E qui sont tous contenus dans K , et qui vérifient la propriété :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall (u_1, \dots, u_r) \in G^r, \quad \bigcap_{i=1}^r F_{u_i} \neq \emptyset$$

(puisque'on a montré dans les questions 11. à 14. que toute famille finie $(u_1, \dots, u_r) \in G^r$ possède un point fixe commun dans K).

Par la contraposée de la question 7., on conclut que $\bigcap_{u \in G} F_u \neq \emptyset$, c'est-à-dire qu'il existe un point fixe $a \in K$ commun à tous les éléments $u \in G$.

* * *