DS03 du 30/11/2024 (4h)
Sujet A (MPI*)

Le sujet se compose de 3 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

Exercice 1 : Un calcul de projeté orthogonal

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

* * *

Exercice 2 : Etude de certains endomorphismes en dim. infinie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, de dimension finie ou infinie, muni d'une norme $\|.\|_E$.
On notera $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, c'est-à-dire les applications linéaires $T : E \to E$.
On rappelle qu'un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(E)$ est continu si et seulement si

$$\exists C \geq 0,\ \forall u \in E, \qquad \|T(u)\|_E \leq C\|u\|_E.$$

Dans ce cas, on note $|||T|||$ la plus petite constante $C \geq 0$ qui vérifie cette inégalité.
On a donc

$$|||T||| = \sup_{u \in E,\ u \neq 0_E} \frac{\|T(u)\|_E}{\|u\|_E}.$$

On notera $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes continus de E.
On rappelle que $|||\ .\ ||| : T \mapsto |||T|||$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{L}_c(E)$.

Etant donné un endomorphisme continu $T \in \mathcal{L}_c(E)$, on appelle respectivement :

(i) **valeur spectrale** de T tout réel λ tel que $T - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif.
On note $\sigma(T)$ l'ensemble des valeurs spectrales de T.

(ii) **valeur propre** de T tout réel λ tel que $T - \lambda Id_E$ n'est pas injectif.
On note $\sigma_p(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T.

Les 2 parties de ce problème sont indépendantes.

Partie I. Endomorphisme d'un espace de fonctions

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$:

$$\forall f \in E, \qquad \|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Pour tout $f \in E$, on considère l'application $T(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad T(f)(x) = x f\left(\frac{x}{2}\right).$$

1. Montrer que l'application $T : f \mapsto T(f)$ est bien définie de E dans E.
2. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.
3. Montrer que $T \in \mathcal{L}_c(E)$.
4. Déterminer $|||T|||$.
5. Déterminer le noyau $Ker(T)$.
6. Déterminer l'image $Im(T)$.

On se place à présent dans E muni de la norme $\|.\|_2$:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx}$$

7. Reprendre la question 3. avec cette nouvelle norme pour E.
8. (*) Reprendre la question 4. avec cette nouvelle norme pour E.
   Pour cela, on pourra considérer la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ d'éléments de E telle que :
   (i) f_n est affine par morceaux,
   (ii) $f_n(0) = f_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = f_n(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}) = f_n(1) = 0$ et $f_n(\frac{1}{2}) = 1$.

Partie II. Endomorphismes dans des espaces de suites

Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel suivant :

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\geq 0} |u_n|^2 \text{ converge}\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}.$$

On note $S : H \to H$ l'application de décalage à gauche :

$$\forall u \in H, \qquad (S(u))_n = u_{n-1} \text{ si } n \geq 1 \text{ et } (S(u))_0 = 0.$$

De même, on note $V : H \to H$ l'application de décalage à droite :

$$\forall u \in H, \qquad (V(u))_n = u_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

9. Montrer que S et V appartiennent à $\mathcal{L}(H)$.
10. Montrer que S et V appartiennent à $\mathcal{L}_c(H)$.
11. Déterminer $Ker(S - \lambda Id_H)$ pour tout réel λ et en déduire les valeurs propres de S.
12. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de V est $\sigma_p(V) =]-1, 1[$.

On se place à présent dans l'espace des suites réelles bornées $F = \ell^\infty(\mathbb{N})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$:

$$\forall u \in F, \qquad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Les applications S et V sont maintenant considérées comme des endomorphismes $F \to F$.

13. Reprendre la question 10. pour les applications S et V dans ce nouvel espace F.
14. Reprendre les questions 11. et 12. dans ce nouvel espace F.
15. On se propose maintenant de déterminer les valeurs spectrales de $S \in \mathcal{L}_c(F)$.
    (a) Montrer que $0 \in \sigma(S)$.
    (b) Soit un réel $\lambda \neq 0$. Montrer que pour tout $(u, v) \in F^2$, on a
    $$(S - \lambda Id_F)(u) = v \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\sum_{k=0}^{n} \frac{v_{n-k}}{\lambda^{k+1}}.$$
    (c) Montrer que pour tout $\lambda \neq 0$, l'endomorphisme $S - \lambda Id_F : F \to F$ est surjectif si et seulement si $|\lambda| > 1$.
    (d) Conclure en déterminant $\sigma(S)$.

Exercice 3 : Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$ dont le produit scalaire est noté $(.|.)$ et la norme euclidienne est notée $\|.\|$. On note $L(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $GL(E)$ le groupe des automorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^i l'endomorphisme $u \circ u \circ \cdots \circ u$ (i fois) avec la convention $u^0 = \mathrm{Id}_E$ (identité). L'ensemble vide est noté $\emptyset$.

On rappelle qu'un sous-ensemble C de E est *convexe* si pour tous x, y dans C et tout $\lambda \in [0, 1]$, on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. De plus, pour toute famille $a_1, \ldots, a_p$ d'éléments de C convexe et tous nombres réels positifs ou nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dont la somme est égale à 1, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i \in C$.

Si F est un sous-ensemble quelconque de E, on appelle *enveloppe convexe* de F, et on note $\mathrm{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant F. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ et on admet que $\mathrm{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ où $x_1, \ldots, x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$.

L'espace vectoriel des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes est noté $M_{n,m}(\mathbb{R})$. On notera en particulier $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$. La matrice transposée d'une matrice A est notée A^T. La trace de A est notée $\mathrm{Tr}(A)$.

On note $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ inversibles et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n.

Les parties A et B sont indépendantes, et la partie C utilise la partie B.

A. Préliminaires

Les trois questions de cette partie sont mutuellement indépendantes.

1. Soit K un sous-ensemble compact de E et $\mathrm{Conv}(K)$ son enveloppe convexe. On rappelle que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.
   (a) Définir une application Φ de $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ dans E telle que $\mathrm{Conv}(K) = \Phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Conv}(K)$ est un sous-ensemble compact de E.
2. On désigne par g un endomorphisme de E tel que pour tous x, y dans E, $(x|y) = 0$ implique $(g(x)|g(y)) = 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un nombre réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$. *(On pourra utiliser une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ et considérer les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ pour $i \in \{2, \ldots, n\}$.)*
   (b) En déduire que g est la composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.
3. On se place dans l'espace vectoriel euclidien $M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique défini par $(A|B) = \mathrm{Tr}(A^\mathsf{T} B)$. (On ne demande pas de vérifier que c'est bien un produit scalaire).
   Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$.

B. Quelques propriétés de la compacité

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geqslant \varepsilon$.

4. Montrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.

Soit K un sous-ensemble compact de E. On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon r.

5. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, \ldots, x_p$ éléments de E tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

On considère une famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles ouverts de E, I étant un ensemble quelconque, telle que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

6. (a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i. (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.)
   (b) En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ telle que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide : $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$.

7. Montrer qu'il existe une sous famille finie $(F_{i_1}, \ldots, F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \emptyset$.

C. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K un sous-ensemble non vide, compact et *convexe* de E. Pour tout $x \in E$, on note $N_G(x) = \sup_{u \in G} \|u(x)\|$.

8. Montrer que N_G est bien définie et que c'est une norme sur E.
9. Montrer en outre que N_G vérifie les deux propriétés suivantes :
   - pour tous $u \in G$ et $x \in E$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$;
   - pour tous $x, y \in E$ avec x non nul, $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

   Pour la deuxième propriété, on pourra utiliser le fait que si $z \in E$, l'application qui à $u \in G$ associe $\|u(z)\|$ est continue.

On considère un élément $u \in L(E)$, et on suppose que K est stable par u, c'est à dire que $u(K)$ est inclus dans K. Pour tout $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} u^i(x)$. Enfin, on appelle *diamètre* de K le réel $\delta(K) = \sup_{x, y \in K} \|x - y\|$ qui est bien défini car K est borné.

10. (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans K et en déduire qu'il en existe une suite extraite convergente vers un élément a de K.
    (b) Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u(x_n) - x_n\| \leqslant \frac{\delta(K)}{n}$.
    (c) En déduire que l'élément a de K est un point fixe de u.

On suppose maintenant que le compact non vide convexe K est stable par tous les éléments de G. Soit $r \geqslant 1$ un entier, $u_1, u_2, \ldots, u_r$ des éléments de G et $u = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} u_i$.

11. Montrer que K est stable par u et en déduire l'existence de $a \in K$ tel que $u(a) = a$.
12. (a) Montrer que $N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$.
    (b) En déduire que pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, on a

$$N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} u_i(a)\right) = N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} u_i(a)\right)$$

13. En déduire, pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geqslant 0$ tel que $u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.
14. Déduire de la question précédente que a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1, \ldots, r\}$.
15. En utilisant le résultat de la question 7., montrer qu'il existe $a \in K$ tel que pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.

* * *