

DS03 du 04/10/2025 (4h)

Sujet A (MPI*)

Le sujet se compose de 3 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Inégalité de Knopp

- Q 1.** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs dans un intervalle J .
Soit $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe sur J . Démontrer que

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f.$$

On pourra utiliser des sommes de Riemann.

Dans la suite, $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction continue, strictement positive et intégrable.
Pour tout $x > 0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x tf(t)dt \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{x}g(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x tf(t)dt.$$

- Q 2.** Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.
Q 3. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On pourra utiliser une intégration par parties faisant intervenir une primitive F de f .

- Q 4.** En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} h(x)dx.$$

On pourra utiliser une intégration par parties.

- Q 5.** Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right) \leq \frac{e}{x^2} \int_0^x tf(t)dt.$$

On pourra remarquer que $\ln(f(t)) = \ln(tf(t)) - \ln(t)$.

- Q 6.** En déduire que $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right) dx \leq e \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

* * *

Exercice 2 : Permutations conjuguées

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

On note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On notera la composition des permutations de manière multiplicative ; par exemple, si γ et σ sont deux permutations de $\mathfrak{S}_n$, $\gamma^3 \sigma^2 = \gamma \circ \gamma \circ \gamma \circ \sigma \circ \sigma$. On dit que deux permutations σ et τ de $\mathfrak{S}_n$ sont conjuguées s'il existe une permutation $\rho \in \mathfrak{S}_n$ telle que $\tau = \rho \sigma \rho^{-1}$.

Pour $\ell \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on rappelle que, dans $\mathfrak{S}_n$, un cycle de longueur ℓ est une permutation $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ pour laquelle il existe ℓ éléments deux à deux distincts $a_1, \dots, a_\ell$ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que

$$\gamma(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \{a_1, \dots, a_\ell\} \\ a_{i+1} & \text{si } x = a_i \text{ pour } i \leq \ell - 1 \\ a_1 & \text{si } x = a_\ell \end{cases}$$

L'ensemble $\text{Supp}(\gamma) = \{a_1, \dots, a_\ell\}$ est appelé support du cycle γ et on note $\gamma = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_\ell)$.

Q 1. Fixons une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$, définie par :

$$\forall (x, y) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad x \mathcal{R} y \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad y = \sigma^k(x).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Q 2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un plus petit entier $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^\ell(i) = i$. En déduire que la classe d'équivalence de i (pour la relation $\mathcal{R}$ précédente) est

$$X_i = cl(x_i) = \{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{\ell-1}(i)\},$$

et que cette classe est de cardinal ℓ .

Q 3. En déduire le théorème suivant :

Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ différente de Id se décompose en produit commutatif de cycles $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ à supports disjoints :

$$\sigma = \gamma_1 \dots \gamma_r.$$

On peut également montrer que cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près, mais nous l'admettons ici.

Q 4. On considère, dans cette question uniquement, $n = 7$ et les cycles $\gamma_1 = (1 \ 3 \ 7)$ et $\gamma_2 = (2 \ 6 \ 4)$. On considère également une permutation $\rho \in \mathfrak{S}_7$ telle que $\rho(1) = 2$, $\rho(3) = 6$ et $\rho(7) = 4$. Vérifier que $\rho \gamma_1 \rho^{-1} = \gamma_2$.

Q 5. Plus généralement, montrer que, dans $\mathfrak{S}_n$, deux cycles de même longueur sont conjugués.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\ell \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on note $c_\ell(\sigma)$ le nombre de cycles de longueur ℓ dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints. On note $c_1(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ :

$$c_1(\sigma) = \text{Card}\{j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(j) = j\}.$$

Q 6. Montrer que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $c_\ell(\sigma) = c_\ell(\tau)$.

La matrice ligne $T_\sigma = (c_1(\sigma) \ c_2(\sigma) \ \dots \ c_n(\sigma))$ s'appelle le type cyclique de σ . On vient donc de démontrer que deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont le même type cyclique.

* * *

Exercice 3 : Fonctions arithmétiques multiplicatives et applications

Notations

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du nombre réel x , c'est à dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x .

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

On note $m \wedge n$ le plus grand commun diviseur (pgcd) des entiers naturels n et m .

Si a et b sont des entiers relatifs, on note $\llbracket a, b \rrbracket = \{k \in \mathbb{Z}, a \leq k \leq b\}$.

L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est notée I_n .

Le terme d'indice (i, j) d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est noté $m_{i,j}$ et on note $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ ou plus simplement $M = (m_{i,j})$ lorsque la taille de M est implicite.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des nombres entiers naturels divisant n et on écrit $\sum_{d|n} = \sum_{d \in \mathcal{D}_n}$ la

somme sur tous les nombres entiers naturels d divisant n .

Une fonction arithmétique est une fonction $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$.

L'ensemble des fonctions arithmétiques est noté $\mathbb{A}$.

On dit qu'une fonction arithmétique $f \in \mathbb{A}$ est multiplicative si

$$\begin{cases} f(1) \neq 0 \\ \forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, m \wedge n = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n) \end{cases}.$$

On note $\mathbb{M}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques multiplicatives.

On note $\mathbf{1}$, δ et $\mathbf{I}$ les fonctions arithmétiques

$$\mathbf{1} : \begin{cases} \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ n \mapsto 1 \end{cases}, \quad \delta : \begin{cases} \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \end{cases}, \quad \mathbf{I} : \begin{cases} \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ n \mapsto n \end{cases}.$$

On remarque que ces trois fonctions arithmétiques sont multiplicatives.

Si f et g sont deux fonctions arithmétiques, le produit de convolution de f et g est la fonction arithmétique notée $f * g$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right).$$

A. Propriétés générales de la loi $*$

Q 1. Vérifier que δ est un élément neutre pour la loi $*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}_n = \{(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2, d_1 d_2 = n\}$.

Q 2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(f * g)(n) = \sum_{(d_1, d_2) \in \mathcal{C}_n} f(d_1)g(d_2).$$

Q 3. En déduire que $*$ est commutative.

Q 4. De même, en exploitant l'ensemble $\mathcal{C}'_n = \{(d_1, d_2, d_3) \in (\mathbb{N}^*)^3, d_1 d_2 d_3 = n\}$, montrer que $*$ est associative.

Q 5. Que peut-on dire de $(\mathbb{A}, +, *)$?

B. Groupe des fonctions multiplicatives

Q 6. Soient f et g deux fonctions multiplicatives. Montrer que si

$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall k \in \mathbb{N}^*, f(p^k) = g(p^k)$$

alors $f = g$.

Q 7. Soient m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Montrer que l'application

$$\pi : \begin{cases} \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m \rightarrow \mathcal{D}_{mn} \\ (d_1, d_2) \mapsto d_1 d_2 \end{cases}$$

est bien définie et réalise une bijection entre $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ et $\mathcal{D}_{mn}$.

Q 8. En déduire que si f et g sont deux fonctions multiplicatives, alors $f * g$ est encore multiplicative.

Q 9. Soit f une fonction multiplicative. Montrer qu'il existe une fonction multiplicative g telle que

$$\forall p \in \mathcal{P}, \forall k \in \mathbb{N}^*, g(p^k) = - \sum_{i=1}^k f(p^i) g(p^{k-i})$$

et qu'elle vérifie $f * g = \delta$.

Q 10. Que dire de l'ensemble $\mathbb{M}$ muni de la loi $*$?

C. La fonction de Möbius

Soit μ la fonction arithmétique définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q 11. Montrer que μ est multiplicative.

Q 12. Montrer que $\mu * \mathbf{1} = \delta$.

Q 13. Soit $f \in \mathbb{A}$ et soit $F \in \mathbb{A}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right).$$

On note φ la fonction indicatrice d'Euler, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) = \text{card}\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \wedge n = 1\}.$$

Q 14. Démontrer que $\varphi = \mu * \mathbf{I}$.

D. Déterminant de Smith

Soient f une fonction arithmétique, $n \in \mathbb{N}^*$ et $g = f * \mu$. On note $M = (m_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général $m_{i,j} = f(i \wedge j)$. On définit aussi la matrice des diviseurs $D = (d_{i,j})$ par

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ divise } i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit M' la matrice de terme général $m'_{i,j} = \begin{cases} g(j) & \text{si } j \text{ divise } i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Q 15. Montrer que $M = M' D^T$ où D^T est la transposée de D .

Q 16. En déduire que le déterminant de M vaut

$$\det(M) = \prod_{k=1}^n g(k).$$

E. Séries de Dirichlet

Soit f une fonction arithmétique. On définit, pour tout réel s tel que la série converge,

$$L_f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k^s}.$$

On appelle abscisse de convergence de L_f

$$A_c(f) = \inf\{s \in \mathbb{R}, \text{ la série } \sum \frac{f(k)}{k^s} \text{ converge absolument}\}.$$

On convient que $A_c(f) = +\infty$ si l'ensemble ci-dessus est vide.

Q 17. Montrer que si $s > A_c(f)$, alors la série $\sum \frac{f(k)}{k^s}$ converge absolument.

Q 18. Soient f et g deux fonctions arithmétiques d'abscisses de convergence finies.

Montrer que si, pour tout $s > \max(A_c(f), A_c(g))$, $L_f(s) = L_g(s)$, alors $f = g$.

Q 19. Soient f et g deux fonctions multiplicatives d'abscisses de convergence finies.

Montrer que, pour tout $s > \max(A_c(f), A_c(g))$,

$$L_f(s)L_g(s) = L_{f*g}(s)$$

* * *