DS02 du 29/09/2026 (3h)
Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Calcul d'une intégrale impropre

1. Fait dans le TD2 ($\sin(x)/x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ donc fausse impropreté en 0 et faire une IPP pour la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$).
2. (a) Fixons $\alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On a $1-\cos(\alpha t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{(\alpha t)^2}{2}$, donc $\frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{\alpha^2}{2}$, ce qui montre que $t \mapsto \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}$ (qui est déjà continue sur $]0,+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$) se prolonge continûment en 0.

   (b) Fixons $\alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}$ ainsi prolongée (en donnant la valeur $\frac{\alpha^2}{2}$ en 0) est continue sur $\mathbb{R}$.
   En outre, $\left|\frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}\right| \leq \frac{2}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{2}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, mais aussi sur $]-\infty,1]$, donc par comparaison, $t \mapsto \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
3. (a) On remarque que la fonction continue $\varphi : t \mapsto \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}$ (prolongée en 0) vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(-t) = \overline{\varphi(t)},$$

   donc en utilisant le changement de variable généralisé $u = -t$ dans l'intégrale convergente I, on obtient :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi(u)}du = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u)du} = \overline{I},$$

   ce qui montre que $I \in \mathbb{R}$.

   (b) Soit $A, B > 0$. La fonction $x \mapsto \frac{\cos(Bx)}{x^2}$ est intégrable sur $[A,+\infty[$ car elle est continue et on a $\left|\frac{\cos(Bx)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ avec $x \mapsto 1/x^2$ intégrable sur $[A,+\infty[$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2}dx$ converge.
   De plus, par IPP généralisée :

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2}dx = \left[-\frac{\cos(Bx)}{x}\right]_A^{+\infty} - B\int_A^{+\infty} \frac{\sin(Bx)}{x}dx = \frac{\cos(AB)}{A} - B\int_A^{+\infty} \frac{\sin(Bx)}{x}dx.$$

   (licite car le crochet a bien une limite finie en $+\infty$ et l'intégrale de gauche converge, donc celle de droite aussi).
   On termine avec le changement de variable généralisé $t = Bx$ dans l'intégrale de droite :

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2}dx = \frac{\cos(AB)}{A} - B\int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt.$$

   (c) Fixons $A, B > 0$. Puisque $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{A}$, on obtient par linéarité de l'intégrale impropre et d'après la question précédente :

$$\int_A^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2}dx = \frac{1-\cos(AB)}{A} + B\int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt.$$

Faisons alors tendre A vers 0^+ : d'une part,

$$\frac{1-\cos(AB)}{A} \underset{A\to 0^+}{\sim} \frac{AB^2}{2} \underset{A\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part :

$$\int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt \underset{A\to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

d'après le résultat admis par l'énoncé. Donc par combinaison linéaire de limites, on obtient que $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2}dx \underset{A\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{B\pi}{2}$, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2}dx = \frac{B\pi}{2},$$

et ce pour tout réel $B > 0$.
Si $B < 0$, alors $-B > 0$ donc par parité du cosinus :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(-Bx)}{x^2}dx = \frac{-B\pi}{2}.$$

Enfin, pour $B = 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(0x)}{x^2}dx = \int_0^{+\infty} 0\ dx = 0,$$

donc finalement

$$\forall B \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2}dx = \frac{|B|\pi}{2}.$$

(d) Déjà I est réelle (d'après 3.(a)), donc

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}dt = \int_{\mathbb{R}} Re\left(\frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}e^{-itx}\right)dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2}\cos(xt)dt.$$

Or,

$$\begin{aligned}(1-\cos(\alpha t))\cos(xt) &= \cos(xt) - \frac{1}{2}\left(\cos((\alpha+x)t) + \cos((\alpha-x)t)\right)\\ &= -(1-\cos(xt)) + \frac{1}{2}\left(1-\cos((\alpha+x)t)\right) + \frac{1}{2}\left(1-\cos((\alpha-x)t)\right),\end{aligned}$$

donc par linéarité de l'intégrale impropre :

$$I = -2\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}dt + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos((\alpha+x)t)}{t^2}dt + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos((\alpha-x)t)}{t^2}dt$$

(en effet, ces trois intégrales convergent d'après la question précédente).
En utilisant le résultat précédemment obtenu pour calculer ces intégrales, on obtient :

$$I = \frac{\pi}{2}\left(|\alpha+x| + |\alpha-x| - 2|x|\right).$$

* * *

Exercice 2 : Questions sur les structures algébriques

1. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$, on définit :

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y},$$

ainsi que

$$\overline{x} \times \overline{y} = \overline{xy}.$$

Ces deux lois internes sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont bien définies (cf. cours), de neutres respectifs $\overline{0}$ et $\overline{1}$.

2. Soit $x \in \mathbb{Z}$. La classe $\overline{x}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $pgcd(x,n) = 1$.
En effet, $\overline{x}$ est inversible ssi il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{1}$, ce qui équivaut à $\overline{xy} = \overline{1}$, ou encore qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $xy = 1 + kn$. Par le théorème de Bézout, cela équivaut à $pgcd(x,n) = 1$.

3. - Si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps, alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre (car tout corps est un anneau intègre).
   - Si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre, montrons que n est premier. Si $n = n_1 n_2$ avec n_1, n_2 dans $\mathbb{N}^*$, alors $\overline{n_1} \times \overline{n_2} = \overline{n} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc par intégrité, on a $\overline{n_1} = \overline{0}$ ou $\overline{n_2} = \overline{0}$, c'est-à-dire que n divise n_1 ou n_2. Mais on a déjà n_1 et n_2 qui divisent n, donc $n = n_1$ ou $n = n_2$, ce qui montre que n est premier (il ne possède pas de diviseur autre que 1 et n dans $\mathbb{N}$).
   - Si n est premier, montrons que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps. Si $\overline{x} \neq \overline{0}$ avec $x \in \mathbb{Z}$, alors n ne divise pas x, ce qui équivaut (puisque n est premier) à $pgcd(n,x) = 1$, donc à $\overline{x}$ inversible d'après la question précédente. Ainsi, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps, puisque tous ses éléments non nuls sont inversibles.

   On a donc montré les équivalences voulues.

4. En divisant par 3, on a

$$6x \equiv 9\ [15] \iff 2x \equiv 3\ [5] \iff \overline{2} \times \overline{x} = \overline{3}.$$

(où $\overline{x}$ désigne la classe de x dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$).
En multipliant par $\overline{3}$ (qui est l'inverse de $\overline{2}$ dans le groupe $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$), on obtient

$$\overline{2} \times \overline{x} = \overline{3} \iff \overline{x} = \overline{9} = \overline{4},$$

donc finalement, les solutions dans $\mathbb{Z}$ de $6x \equiv 9\ [15]$ sont les $x = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

* * *

Exercice 3 : Radical d'un idéal

1. Montrons que $R(I) = \{x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \in I\}$ est un idéal de A :
   - $0_A \in R(I)$ car $0_A^1 = 0_A \in I$ (puisque I est un idéal, il contient 0_A).
   - si x, y sont dans $R(I)$, alors il existe $n, m \geq 1$ entiers tels que $x^n \in I$ et $y^m \in I$. Donc par la formule du binôme (valable car $xy = yx$), on obtient

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k} + \sum_{k=n}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k}.$$

   Dans la première somme : pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $n + m - k \geq m$, or $y^m \in I$ donc par absorption, $y^{n+m-k} \in I$, et toujours par absorption, $x^k y^{n+m-k} \in I$. La stabilité de I par somme entraîne alors que $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k} \in I$.
   De même dans la seconde somme : tous les x^k avec $k \geq n$ sont dans I, donc par absorption et stabilité par somme, $\sum_{k=n}^{n+m} \binom{n+m}{k} x^k y^{n+m-k} \in I$.
   Ainsi, $(x+y)^{n+m} \in I$ (avec $n + m \in \mathbb{N}^*$), ce qui prouve que $x + y \in R(I)$.

- Enfin, si $x \in R(I)$ et $a \in A$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in I$, donc $(ax)^n = a^n x^n \in I$ par absorption, ce qui prouve que $ax \in R(I)$.

Enfin, l'idéal $R(I)$ contient bien I puisque si $x \in I$, alors $x^1 = x \in I$, donc $x \in R(I)$.

2. Supposons $I \subset J$. Si $x \in R(I)$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in I$, donc $x^n \in J$, ce qui prouve que $x \in R(J)$. Donc $R(I) \subset R(J)$.

3. (a)
   - Soit $x \in R(I \cap J)$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in I \cap J$. Donc $x^n \in I$, ce qui montre que $x \in R(I)$, et de même, $x \in R(J)$, donc $x \in R(I) \cap R(J)$. Ceci montre l'inclusion $R(I \cap J) \subset R(I) \cap R(J)$.
   - Si $x \in R(I) \cap R(J)$, alors il existe deux entiers n_1, n_2 dans $\mathbb{N}^*$ tels que $x^{n_1} \in I$ et $x^{n_2} \in J$. Par absorption, on en déduit que $x^{\max(n_1,n_2)} \in I \cap J$. Donc $x \in R(I \cap J)$, ce qui montre l'inclusion $R(I) \cap R(J) \subset R(I \cap J)$.

   Finalement, on a bien $R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)$.

   (b) D'après le cours, $I + J$ est un idéal de A et $I \subset I + J$, donc par la question 2., on obtient l'inclusion $R(I) \subset R(I + J)$. De même, $R(J) \subset R(I + J)$.
   Mais $R(I + J)$ étant lui-même un idéal (par la question 1.), il est stable par somme, donc $R(I) + R(J) \subset R(I + J)$.

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{Z}$. On a

$$x \in R(p^k\mathbb{Z}) \iff \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \in p^k\mathbb{Z} \iff \exists n \in \mathbb{N}^*,\ p^k | x^n.$$

   S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^k | x^n$, alors par transitivité, $p | x^n$ (puisque $p | p^k$). Par le lemme d'Euclide, cela entraîne $p | x$ (puisque p est un nombre premier).
   Réciproquement, si $p | x$, alors $p^k | x^k$, donc en posant $n = k$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^k | x^n$.
   Finalement, on a l'équivalence

$$x \in R(p^k\mathbb{Z}) \iff p | x \iff x \in p\mathbb{Z},$$

   donc l'égalité $R(p^k\mathbb{Z}) = p\mathbb{Z}$.

   (b) On peut supposer que $n \geq 2$, car pour $n = 1$, on a toujours $R(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et l'entier 1 est sans facteurs carrés donc l'équivalence annoncée est triviale.

   - Si $n \geq 2$ est sans facteurs carrés, alors $n = p_1 \cdots p_N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \cdots, p_N$ des nombres premiers distincts. Montrons alors l'inclusion $R(n\mathbb{Z}) \subset n\mathbb{Z}$ (l'autre étant toujours vraie d'après la question 1.) : si $x \in R(n\mathbb{Z})$ alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^k \in n\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $p_1 \cdots p_N | x^k$. Chaque nombre premier p_i divise x^k (avec $k \geq 1$), donc par le lemme d'Euclide, p_i divise x. Puisque $p_1, \cdots, p_N$ sont deux à deux premiers entre eux, on en déduit que $p_1 \cdots p_N$ divise x, donc $x \in n\mathbb{Z}$.
     On a donc l'égalité $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$.
   - Si $n \geq 2$ a au moins un facteur carré, alors n s'écrit $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_N^{\alpha_N}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, les p_i premiers distincts et les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ avec au moins un des $\alpha_i \geq 2$.
     Quitte à permuter les p_i, on peut supposer que $\alpha_1 \geq 2$.
     Montrons alors que l'inclusion $n\mathbb{Z} \subset R(n\mathbb{Z})$ (toujours vraie) est stricte : l'élément $x = p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_N^{\alpha_N} = n/p_1$ n'est pas multiple de n, donc $x \notin n\mathbb{Z}$, mais
     $x^2 = p_1^{2\alpha_1 - 2} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_N^{2\alpha_N} \in n\mathbb{Z}$ (puisque $2\alpha_1 - 2 \geq \alpha_1$, étant donné que $\alpha_1 \geq 2$).

   Finalement, on a bien l'équivalence : $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ ssi n est sans facteurs carrés.

* * *

Exercice 4 : Suites et séries

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $s_{p+1} - s_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n+p+1} > 0$, donc $(s_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
   Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

   $$\begin{aligned} s_p &= \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \sum_{j=n}^{n+p} \frac{1}{j} \quad \text{(en posant } j = n+k\text{)} \\ &= \sum_{j=1}^{n+p} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

   Or, $\lim\limits_{p\to+\infty} n+p = +\infty$, donc, comme $\lim\limits_{N\to+\infty} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} = +\infty$ (série harmonique), on a

   $$\lim_{p\to+\infty} s_p = \lim_{p\to+\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{n+p} \frac{1}{j}}_{\to+\infty} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}}_{\text{constante}} = +\infty.$$

   La suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est donc bien (strictement) croissante et divergente.

   (b) • Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} s_p = +\infty$, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geq p_0$, $s_p \geq 2 > 1$.
   Il existe donc bien au moins un entier naturel p tel que l'on ait :

   $$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p} > 1.$$

   Par suite, $p_n = \min\{p \in \mathbb{N} : s_p > 1\}$ existe comme minimum d'un ensemble non vide d'entier naturels.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n + p_n \geq n$, donc, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on obtient par minoration que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc divergente.

3. • Pour tout $n \geq 2$, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$, donc, en sommant cette inégalité pour $k = 1 \cdots n-1$,

   $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1.$$

   • Pour la seconde inégalité, le plus simple est de procéder par récurrence sur $n \geq 2$:

   * Pour $n = 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{2+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$, donc la propriété annoncée est vraie.

   * Soit $n \geq 2$. Si on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1$, alors

   $$\sum_{k=0}^{2(n+1)-2} \frac{1}{(n+1)+k} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1},$$

   donc par hypothèse de récurrence :

   $$\sum_{k=0}^{2(n+1)-2} \frac{1}{(n+1)+k} > 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} = 1 + \frac{2}{3n(9n^2-1)} > 1,$$

   ce qui montre que la propriété annoncée est héréditaire.

4. D'après la définition de p_n et les inégalités précédentes, $n-1 \leqslant p_n \leqslant 2n-2$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2n-1 \leqslant a_n \leqslant 3n-2$.
   Alors en divisant par n $(n>0)$, $2-\frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3-\frac{2}{n}$.
   Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, on obtient donc par passage à la limite :
   $$2 \leq \ell \leq 3.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de p_n, $1 < \sum_{k=0}^{p_n} \frac{1}{n+k}$ et $\sum_{k=0}^{p_n-1} \frac{1}{n+k} \leqslant 1$.
   Donc $1 < \sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k}$ et $\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1$.
   Ainsi $1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$.

6. Soit n un entier non nul.
   - Soit k un entier non nul.
     La fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$.
     Donc $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.
     Donc en sommant sur k de n à $a_n - 1$,
     $$\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$$
     Ou encore
     $$\sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$$
   - Or d'après la question précédente, $1 < \sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k}$. Donc $1 - \frac{1}{n} < \sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k}$.
     Et $\sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$. Donc $\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1$.

   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
   $$1 - \frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1.$$

7. - Remarquons que
     $$\int_n^{a_n} \frac{dt}{t} = \ln(a_n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) = \ln(u_n).$$
     Ainsi d'après les questions précédentes, $1 - \frac{1}{n} \leqslant \ln(u_n) \leqslant 1$.
   - On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$.
     Donc par encadrement, la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 1$.
     Par continuité de la fonction exp en 1, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers e.

* * *