DS02 du 29/09/2026 (3h)
Sujet B (MPI)

Le sujet se compose de 4 exercices indépendants.
Calculatrice interdite.

* * *

Exercice 1 : Calcul d'une intégrale impropre

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ existe. On admet alors qu'elle vaut $\pi/2$.
2. (a) Montrer que pour tout α strictement positif et pour tout x réel, l'application $t \mapsto \dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$ est prolongeable par continuité en 0.

   (b) Montrer que $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \dfrac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx}$ ainsi prolongée est intégrable sur $\mathbb{R}$.
3. On note, $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(\alpha t)}{t^2} e^{-itx} dt.$$

   (a) Montrer que I est réelle.

   (b) Soit $A > 0$ et $B > 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx$ converge et que :

$$\int_A^{+\infty} \frac{\cos(Bx)}{x^2} dx = \frac{\cos(AB)}{A} - B \int_{AB}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

   (c) En déduire le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(Bx)}{x^2} dx$ pour $B > 0$ puis pour B quelconque.

   (d) En déduire le calcul de l'intégrale I.

* * *

Exercice 2 : Questions sur les structures algébriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n}\}$ de sa structure d'anneau commutatif.

1. Rappeler la définition des deux lois internes de cet anneau et donner les éléments neutres respectifs.
2. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? Démontrer.
3. Montrer que :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ est un corps } \iff n \text{ est premier } \iff \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ est intègre.}$$

4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x \equiv 9\ [15]$.

* * *

Exercice 3 : Radical d'un idéal

Soit I un idéal d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$. On note $R(I)$ l'ensemble des éléments x de A pour lesquels il existe un entier naturel n non nul tel que $x^n \in I$:

$$R(I) = \{x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \in I\}.$$

1. Montrer que $R(I)$ est un idéal de A contenant I.
2. Montrer que si I et J sont deux idéaux de A, alors
$$I \subset J \implies R(I) \subset R(J).$$
3. Montrer que si I et J sont deux idéaux de A, alors
   (a) $R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)$,
   (b) $R(I) + R(J) \subset R(I + J)$.
4. On suppose que $A = \mathbb{Z}$. On rappelle que les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont exactement les $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit p un nombre premier. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $R(p^k\mathbb{Z}) = p\mathbb{Z}$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ si et seulement si n est sans facteurs carrés (c'est-à-dire que pour tout nombre premier p, p^2 ne divise pas n).

* * *

Exercice 4 : Suites et séries

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $s_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}$.
   Vérifier que la suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente.
   (b) Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait :
$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > 1.$$
   On note alors $a_n = n + p_n$ où p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété et on pose : $u_n = \dfrac{a_n}{n}$. On a donc : $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} > 1$.
2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?
3. Prouver pour $n \geqslant 2$ que l'on a :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1.$$
4. Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors $\ell \in [2, 3]$.
5. Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :
$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}.$$
6. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :
$$1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leqslant 1.$$
7. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

* * *